

**FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO
BRATISLAVA**



**PÍ SOMNÁ ČASŤ
DIZERTAČNEJ SKÚŠKY**



Katedra Algebry, Geometrie a Didaktiky Matematiky
Fakulta Matematiky, Fyziky a Informatiky
Univerzita Komenského, Bratislava

Algoritmy Bèzierovho orezávania pre prieniky čiar

Písomná časť dizertačnej skúšky

Vladimír Palaj

Odbor: 11-16-9 GEOMETRIA A TOPOLOGIA

Školiteľ: doc. RNDr. Miloš Božek, CSc.

Bratislava, 2006

Obsah

Abstrakt	5
Úvod	6
1 Reprezentácie kriviek	8
1.1 Analytické krivky	8
1.2 Interpoláčn� krivky	9
1.3 Aproxima�n� krivky	9
1.3.1 B�zierove krivky	10
1.3.2 Splajnov� krivky	17
2 Metóda B�zierovho orezávania	18
2.1 Konvexn� obal	18
2.1.1 Motivácia	18
2.1.2 Určenie konvexného obalu	19
2.2 Reparametrizácia ľubovoľného intervalu B�zierovej krivky	19
2.3 Konverzia medzi reprezentáciami	20
2.3.1 Konverzia Monomiálny – B�zierov tvar (CMB) a B�zierov – Mono- mi�lny tvar (CBM)	21
2.3.2 Konverzia Polynomick� – B�zierov tvar (CPB) a B�zierov – Polyno- mick� tvar (CBP)	23
2.4 Geometrick� konštrukcia bodov V_1, V_2	27

3	Algoritmy Bèzierovho orezávania	29
3.1	Korene polynómov	29
3.2	Prieniky typu KRIVKA – PRIAMKA	34
3.3	Prieniky typu KRIVKA – KRIVKA	37
3.3.1	Konštrukcia hrubej priamky	38
3.3.2	Kvadratická Bèzierova krivka a jej užšia hrubá priamka	38
3.3.3	Kubická Bèzierova krivka a jej užšia hrubá priamka	39
4	Projekt dizertačnej práce	47
4.1	Konverzia rôznych typov kriviek na Bèzierove krivky	47
4.2	Dôkaz konvexnosti orezávania konvexného obalu	48
4.3	Programová realizácia	47
4.4	Experimenty	48
	Zoznam použitej literatúry	50

Zoznam obrázkov

Obr. 1	Derivácia Bèzierovej krivky	15
Obr. 2	Geometrická interpretácia prvej derivácie v koncových bodoch	16
Obr. 3	Geometrická interpretácia druhej derivácie v koncových bodoch	17
Obr. 4	Konvexný obal štyroch bodov v rovine	19
Obr. 5	Konverzia Polynomický – Bèzierov tvar (CPB)	24
Obr. 6	Delenie intervalu $\langle a, b \rangle$ polynomickej funkcie	26
Obr. 7	Geometrická konštrukcia bodov V_1, V_2	27
Obr. 8	Prienik konvexného obalu Bèzierovej krivky a parametrickej osí x	30
Obr. 9	Prienik konvexného obalu Bèzierovej krivky s osou t – prázd- na množina	31
Obr. 10	Prienik konvexného obalu Bèzierovej krivky s osou t – jeden bod	31
Obr. 11	Prienik konvexného obalu Bèzierovej krivky s osou t – úseč- ka	32
Obr. 12	Zadanie CL algoritmu a konverzia CPB pre t intervalu $\langle a, b \rangle$	32
Obr. 13	PT algoritmus	34
Obr. 14	Zadanie CL algoritmu a vyčíslenie orientovanej vzdia- lenosti d_i	36
Obr. 15	CL algoritmus	37

Obr. 16	Hrubá priamka krivky	37
Obr. 17	Užšia hrubá priamka kvadratickej Bèzierovej krivky	39
Obr. 18	Užšia hrubá priamka kubickej Bèzierovej krivky $a)$	40
Obr. 19	Užšia hrubá priamka kubickej Bèzierovej krivky $b)$	41
Obr. 20	Minmax obal	42
Obr. 21	CC algoritmus: $a)$ zadanie	43
Obr. 22	CC algoritmus: $b)$ konštrukcia hrubej priamky a orientované vzdialenosti	44
Obr. 23	CC algoritmus: $c)$ novovytvorená Bèzierova krivka	45
Obr. 24	CC algoritmus: $d)$ výsledok	46

Abstrakt

V tejto práci študujeme Bèzierove krivky na základe ich vlastností, konverzie medzi jednotlivými reprezentáciami kriviek a skúmame postupy hľadania prieniku kriviek v rovine. Predovšetkým vlastnosť konvexného obalu Bèzierových kriviek tvorí uzol, pomocou ktorého vyšetrujeme prienik kriviek v rovine. Projekt opisuje naše ciele, kde navrhujeme teoretické postupy nových, rozšírených algoritmov pre všeobecný stupeň kriviek a pokúsime sa rozšíriť postupy hľadania prieniku „objektov“ známe v E^2 na postupy v E^3 využitím ďalších reprezentácií kriviek.

Úvod

Predkladaná práca sa zaoberá štúdiom Bèzierových kriviek, ich vlastností a nadväzujúcich spojitostí s inými typmi kriviek, ktoré nám dávajú podklad pre skúmanie prienikov kriviek a čiar postupom (metódou) Bèzierovho orezávania. Proces hľadania prieniku, zatiaľ dvoch kriviek, sme sa snažili zapísať pomocou algoritmov deliacich sa do troch skupín podľa objektu skúmania. Sú to:

- *korene polynómov (algoritmus pre hľadanie prieniku krivky s parametrickou osou x),*
- *prienik typu priamka - krivka (algoritmus pre hľadanie prieniku krivky s priamkou l vo všeobecnej polohe)*
- *prienik typu krivka - krivka (algoritmus pre hľadanie prieniku krivky s inou krivkou)*

Je zrejmé, že základ tejto práce tvorí pojem krivky, resp. čiary a jej geometrické modelovanie. Každú krivku môžeme zadávať, popisovať a modifikovať pomocou viacerých metód zahrnutých v každej kapitole. Pre upresnenie, v celom dokumente budeme pracovať v rovine, a to s krivkami tretieho stupňa ($n=3$).

Prvá kapitola tvorí prehľad reprezentácií kriviek. Spomíname ich definície a základné vlastnosti, ktoré opisujeme v nasledujúcich kategóriách. Zadávanie kriviek:

- *Analytický (explicitne, implicitne a parametrický)*
- *Postupnosťou bodov (vznikajú interpolačné a aproximačné krivky)*

Najväčšou mierou však študujeme Bèzierove krivky, pretože sa dajú ľahko konštruovať a ich veľkou výhodou je vlastnosť konvexného obalu.

Ďalšia kapitola sa týka problematiky konvexného obalu a problematiky konverzií medzi jednotlivými reprezentáciami kriviek, pričom sa snažíme analyticky zdôvodniť niektoré skutočnosti. Určenie konvexného obalu krivky v rovine sme zjednodušili, kvôli stupňu n (rovnajúce sa trom) danej krivky, na hľadanie konvexnej množiny štyroch bodov v rovine.

Do tretej kapitoly sme zahrnuli algoritmy všetkých troch skupín hľadania prienikov a venujeme sa tvorbe tzv. hrubej priamky pri treťom type prieniku.

Posledná kapitola (*projekt dizertačnej práce*) obsahuje informácie týkajúce sa budúcej našej práce, ktorá bude spočívať predovšetkým v hľadaní dôkazu konvergenencie „iteračného“ procesu, t.j. dôkaz, že po konečnom počte krokov orezávania konvexného obalu krivky nastane situácia, kde vzdialenosť $|t_{\min}, t_{\max}| < \varepsilon$, pre $t_{\min}, t_{\max} \in \langle a, b \rangle$ a pre pevne zvolené ε . Ďalej sa budeme snažiť implementovať algoritmy do programovej realizácie (Delphi 4.0), ktorá bude slúžiť i ako aplikačný a ilustračný podklad. A v neposlednej miere bude treba štatisticky overiť správnosť riešenia hľadania prieniku kriviek v rovine, t.j. experimentálna podstata riešenia problému.

Autor

Kapitola 1

Reprezentácie kriviek

Krivky sú objekty, ktoré sa veľmi často používajú v počítačovej grafike a geometrickom modelovaní. Sú používané napr. pri vytváraní rôznych typov simulácií, pri určovaní tvarov iných objektov pomocou nich modelovaných, ale hlavne pri definovaní, modifikovaní a modelovaní objemových a povrchových telies. Existujú viaceré spôsoby, ako reprezentovať krivky. Kvôli počtu a rozmanitosti reprezentácií má každá z nich svoje výhody i nevýhody. Pre dosiahnutie našich cieľov sa zameriame na jednu z najpoužívanejších reprezentácií, a to parametrickú reprezentáciu.

Definícia 1.1 Krivkou v E^2 nazývame množinu bodov $M = \{X \in E^2; X = f(t); t \in \langle a, b \rangle\}$, kde $f: \mathbb{R} \rightarrow E^2$ je funkcia opisujúca krivku, t je (časový) parameter a $\langle a, b \rangle$ je interval, na ktorom je funkcia f definovaná.

Je zrejmé, že tvar a vlastnosti krivky sa týkajú funkcie f a zároveň aj intervalu $\langle a, b \rangle$, t.j. definičného oboru.

1.1 Analytické krivky

Analyticky môžeme krivku v E^2 zadať :

- **Explicitne** vyjadrená krivka môže byť zadaná ako graf spojitej funkcie v tvare:

$$y = f(x), \quad x \in J \quad (1.1)$$

a býva orientovaná v smere rastúceho x krivky ako funkcie. Napr. rovnica

$$\text{elipsy má tvar: } y = \pm \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2}, \quad x \in \langle -a, a \rangle$$

- **Implicitné zadávanie krivky má tvar**

$$F(x, y) = 0, \quad (1.2)$$

$$\text{napr. rovnica elipsy } F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

- **Parametricky:** $x = x(t)$

$$y = y(t), \quad t \in J \quad (1.3)$$

Znova príklad elipsy: $x = a \cos t$

$$y = b \sin t \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle, a > 0, b > 0$$

1.2 Interpoláčn  krivky

Zostrojenie interpolačnej krivky spočíva v konštrukcii krivky, ktorá prechádza danými uzlovými bodmi. V numerickej matematike sa na výpočet určitého integrálu používajú interpolácie pomocou polynómov. V počítačovej grafike sa interpolácia používa na zostrojovanie kriviek pre zadané riadiace body, ktorými interpolačná krivka prechádza. Problémom je určenie hodnoty parametra, pre ktorý získame daný riadiaci (určujúci) bod interpolačnej krivky. Medzi najznámejšie interpolačné krivky patrí **Hermitova kubická splajnová krivka**. Názov kubika sa používa pre krivky 3. stupňa.

1.3 Aproximačné krivky

Pre aproximačnú krivku máme daných niekoľko bodov, ale väčšinou nepožadujeme, aby nimi prechádzala. Základ konštruovania takýchto kriviek položili B zier a Casteljau v rokoch 1959-62 a spočíva v aproximácii danej krivky pomocou riadiaceho polygónu. V nasej práci budeme používať tvar kriviek $f(t) = \sum P_i \theta_i(t)$, kde P_i budú predstavovať riadiace body, ktoré určujú výsledný tvar krivky a $\theta_i(t)$ budú tvarovacie funkcie, ktoré definujú, ako veľmi príslušné riadiace body pôsobia na tvar krivky. Riadiace body tvoria lomen  čiaru $P_0 P_1 \dots P_n$ nazvan  riadiaci polygón. Pretože body krivky majú tvar lineárnej kombinácie riadiacich bodov P_i , suma tvarovacích funkcií je rovn  jednej, t.j. $\sum \theta_i(t) = 1$, pre všetky t . Tento typ krivky nám dáva dobré vlastnosti pre modelovanie a úpravu pre ďalšie použitie.

Z kladn  príklad predstavujú B zierove krivky, ktoré s vlastnosťou konvexného obalu nám dávajú dostatočnú výhodu, pomocou ktorej dokážeme zistiť prieniky kriviek i vyšších stupňov ($n > 3$).

1.3.1 Bèzierove krivky

Zamerajme sa na polynomicke krivky. Krivka v rovine je vyjadrená pomocou funkcií, ktorých súradnice sú polynomicke funkcie. Jej základné vyjadrenie je

$$f(t) = \begin{bmatrix} a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0 \\ b_n t^n + \dots + b_1 t + b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} t^n + \dots + \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

kde n je stupeň polynómu, tvarovacie funkcie sú $\theta_i(t) = t^i$ a riadiace body sú $P_i = [a_{n-i}, b_{n-i}]$. Pretože nepoznáme presné vzťahy medzi tvarom riadiaceho polygónu a tvarom krivky, musíme skúmať tvarovacie funkcie, ktoré sú vhodné na modelovanie polynomických kriviek.

Definícia 1.2 Pre $n \in \mathbb{N}_0$ definujeme $(n+1)$ Bernsteinových polynómov (funkcií) ako zobrazenie $\mathbf{B}_{in} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in 0, \dots, n$ tak, že platí

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

kde $\binom{n}{i}$ sú kombinačné čísla vyjadrené rekuretné

$$\binom{n}{i} = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!} & \text{ak } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \quad (0! = 1).$$

Vlastnosti Bernsteinových polynómov

(Bernsteinove polynómy stupňa n taktiež nazývame Bernsteinovými bázovými funkciami stupňa n ; Bernsteinove polynómy sa prvýkrát objavili v dôkaze Weierstrassovej vety)

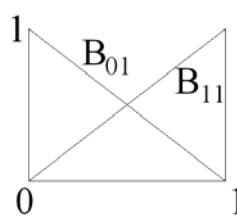
[9, str. 131-133]

Grafy Bernsteinových polynómov pre $n = 1, 2, 3$:

$$n = 1 \quad B_{i,1}(t) = \binom{1}{i} t^i (1-t)^{1-i}$$

$$B_{0,1}(t) = 1 - t$$

$$B_{1,1}(t) = t$$



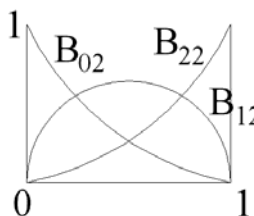
$$n = 2$$

$$B_{i,2}(t) = \binom{2}{i} t^i (1-t)^{2-i}$$

$$B_{0,2}(t) = (1-t)^2$$

$$B_{1,2}(t) = 2t(1-t)$$

$$B_{2,2}(t) = t^2$$



$$n = 3$$

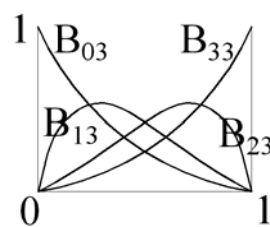
$$B_{i,3}(t) = \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i}$$

$$B_{0,3}(t) = (1-t)^3$$

$$B_{1,3}(t) = 3t(1-t)^2$$

$$B_{2,3}(t) = 3t^2(1-t)$$

$$B_{3,3}(t) = t^3$$



Veta 1.2 Vlastnosti Bernsteinových polynómov:

1. **Nezápornosť:** $B_{i,n}(t) \geq 0$ pre každé i, n a $t \in \langle 0,1 \rangle$

2. **Rozklad Jednotky:** $\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1$ pre každé $t \in \langle 0,1 \rangle$

Dôkaz: $\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = (t + (1-t))^n = 1 \quad \square$

3. $B_{0,n}(0) = B_{n,n}(1) = 1$; $B_{i,n}(0) = 0 \quad i=1, \dots, n$;
 $B_{i,n}(1) = 0 \quad i=0, \dots, n-1$

4. **Symetria:** $B_{i,n}(1-t) = B_{n-i,n}(t) \quad i=0, \dots, n$

Dôkaz: $B_{i,n}(1-t) = \binom{n}{i} (1-t)^i \underbrace{(1-(1-t))^{n-i}}_t = \binom{n}{i} (1-t)^i t^{n-i}$

$$B_{n-i,n}(t) = \binom{n}{n-i} t^{n-i} (1-t)^{n-(n-i)} = \binom{n}{n-i} t^{n-i} (1-t)^i ;$$

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i} \quad \square$$

5. **Rekurzia (rekurentný vzorec):** $B_{i,n}(t) = (1-t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t)$,
 $i=1, \dots, n$, kde

$$B_{-1,n-1}(t) = 0 ; \quad B_{n,n-1}(t) = 0$$

Dôkaz: $\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right] t^i (1-t)^{n-i} =$
 $= \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i} + \binom{n-1}{i-1} t^i (1-t)^{n-i} =$
 $= (1-t) \left[\binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i-1} \right] + t \left[\binom{n-1}{i-1} t^{i-1} (1-t)^{n-i} \right] =$
 $= (1-t) B_{i,n-1}(t) + t B_{i-1,n-1}(t) \quad \square$

6. Derivácie:

1. derivácia: $B'_{i,n}(t) = n\{B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)\}$

Dôkaz:

$$\begin{aligned} B'_{i,n}(t) &= \left[\binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \right]' = i \binom{n}{i} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - (n-i) \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i-1} = \\ &= \frac{i \cdot n!}{i!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - \frac{(n-i) \cdot n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i-1} = \\ &= \frac{n \cdot (n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - \frac{n \cdot (n-1)!}{i!(n-i-1)!} t^i (1-t)^{n-i-1} = \\ &= n \cdot B_{i-1,n-1}(t) - n \cdot B_{i,n-1}(t) = n\{B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)\} \quad \square \end{aligned}$$

2. derivácia: $B''_{i,n}(t) = n(n-1)\{B_{i-2,n-2}(t) - 2B_{i-1,n-2}(t) + B_{i,n-2}(t)\}$

7. Lokálne Maximum: polynóm $B_{i,n}(t)$ má práve jedno lokálne maximum

$$\text{pre } t = \frac{i}{n}$$

$$\text{Dôkaz: } B'_{i,n}(t) = i \binom{n}{i} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - (n-i) \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i-1} = 0 \Rightarrow t = \frac{i}{n} \quad \square$$

8. Množina $\{B_{i,n}(t), i=0, \dots, n\}$ je **bázou vektorového priestoru** všetkých polynómov stupňa $\leq n$ (rádu $n+1$)

Dôkaz: vyjadríme $B_{i,n}(t)$ ako lineárne kombinácie $1, t, t^2, \dots, t^n$ a matica koeficientov je regulárna; Konverzia MONOMIÁLNA – BERNSTEINOVA BÁZA:

$$n=1 \quad [1-t \ t] = [1 \ t] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$n=2 \quad \begin{bmatrix} (1-t)^2 & 2t(1-t) & t^2 \end{bmatrix} = [1 \ t \ t^2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$n=3$$

$$\begin{bmatrix} (1-t)^3 & 3t(1-t)^2 & 3t^2(1-t) & t^3 \end{bmatrix} = [1 \ t \ t^2 \ t^3] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}}_{M_B}$$

Ďalej vyjadríme prvky monomiálnej bázy prvkami Bernsteinovej, pretože sú v praxi často používané; Konverzia BERNSTEINOVA – MONOMIÁLNA BÁZA:

$$n = 1 \quad [1 \ t] = [1-t \ t] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$n = 2 \quad [1 \ t \ t^2] = \begin{bmatrix} (1-t)^2 & 2t(1-t) & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$n = 3$$

$$[1 \ t \ t^2 \ t^3] = \begin{bmatrix} (1-t)^3 & 3t(1-t)^2 & 3t^2(1-t) & t^3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_B^{-1}}$$

Pretože matica $\mathbf{M}_B$ je trojuholníková i na diagonále sa nenachádza nula, matica $\mathbf{M}_B^{-1}$ bude existovať. $\square$

Keďže máme už zadefinované tvarovacie funkcie, môžeme prejsť na definovanie kriviek pomocou nich určených.

Definícia 1.3 Nech $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$ je daná postupnosť bodov v rovine a funkcie $B_{i,n}(t)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$ sú *Bernsteinove polynómy*. Potom krivka v E^2 , ktorej súradnice vyhovujú rovnici

$$\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \mathbf{V}_i, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle \quad (1.4)$$

nazývame Bèzierova krivka n -tého stupňa. Lomená čiara spájajúca body $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$ sa nazýva riadiaci polygón Bèzierovej krivky.

Vlastnosti Bèzierových kriviek

$$\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \mathbf{V}_i, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

$$\text{Maticový zápis: } \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} B_{0,n}(t) & B_{1,n}(t) & \dots & B_{n,n}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{V}_n \end{bmatrix}$$

Parametrické vyjadrenie v 3D: $\mathbf{V}_i(x_i, y_i, z_i)$

$$x(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) x_i$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t)y_i \quad t \in \langle 0,1 \rangle$$

$$z(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t)z_i$$

Veta 1.3 Vlastnosti Bèzierových kriviek:

I. Interpolácia koncových bodov radiaceho polygónu V_0, V_n :

$$B(0) = V_0 \quad B(1) = V_n \quad (\text{vlastnosť 3})$$

II. Konvexný obal: Bezierova krivka leží v konvexnom obale určenom svojimi radiacimi vrcholmi.

Dôkaz: vyplýva zo skutočnosti, že Bernsteinove polynómy sú nezáporné (vlastnosť 1) a splňajú rozklad jednotky (vlastnosť 2), potom bod ako lineárna kombinácia bodov s nezápornými koeficientmi je bod z konvexného obalu radiacich bodov Bèzierovej krivky.

III. Invariantnosť vzhľadom na

a) **afinnú transformáciu T priestoru**

$$T\left(\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t)V_i\right) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t)T(V_i)$$

b) **afinnú transformáciu parametra**

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t)V_i = \sum_{i=0}^n B_{i,n}\left(\frac{u-a}{b-a}\right)V_i, \quad u \in \langle a,b \rangle, t \in \langle 0,1 \rangle$$

Dôkaz a): vyplýva zo zachovania barycentrických kombinácií bodov pri afinnej transformácii.

Dôkaz b): [12, str. 293-294]

IV. Pseudolokálne riadenie:

Bernsteinov polynóm $B_{i,n}(t)$ má jediné lokálne maximum pre $t = \frac{i}{n}$. To znamená, že ak sa zmení jediný vrchol krivky V_i , tak sa zmení len jediný člen analytického vyjadrenia krivky a to $B_{i,n}(t)V_i$. Tento sa však najviac zmení v okolí parametra $t = \frac{i}{n}$ (-približne; ak sa zmení V_i o 3 jednotky, krivka sa zmení o 1 jednotku)

V. Symetrickosť (súmernosť)

$$B(t) = \sum_{j=0}^n B_{j,n}(t)V_j = \sum_{j=0}^n B_{j,n}(1-t)V_{n-j}$$

$$\underline{Dôkaz:} \sum_{j=0}^n B_{j,n-j}(1-t)V_{n-j} \stackrel{\substack{\text{vlastnosť 4} \\ \text{symetria}}}{=} \sum_{j=0}^n B_{n-j,n}(t)V_{n-j} = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t)V_i . \square$$

VI. Derivácie Bezierovej krivky:

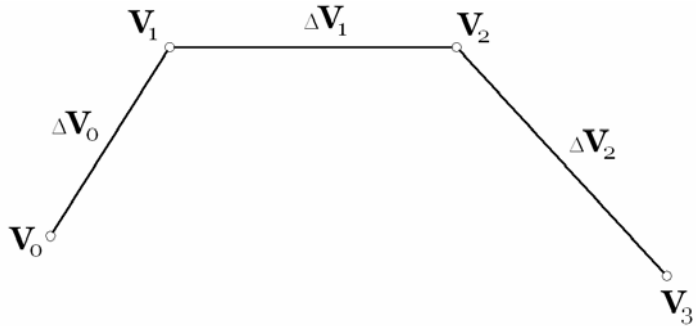
1. derivácia: $\mathbf{B}'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \Delta \mathbf{V}_i$
2. derivácia: $\mathbf{B}''(t) = n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} B_{i,n-2}(t) (\mathbf{V}_{i+2} - 2\mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{V}_i)$
- r. derivácia: $\mathbf{B}^{(r)}(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^n B_{i,n-r}(t) \Delta^r \mathbf{V}_i$,

$$\text{kde } \Delta^r \mathbf{V}_i = \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} \mathbf{V}_{i+j}$$

Dôkaz 1:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'(t) &= \left[\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \mathbf{V}_i \right]' = \sum_{i=0}^n B'_{i,n}(t) \mathbf{V}_i \stackrel{\text{vlastnosť 6}}{=} \sum_{i=0}^n n (B_{i-1,n-1}(t) - B_{i,n-1}(t)) \mathbf{V}_i = \\ &= n \sum_{i=1}^n B_{i-1,n-1}(t) \mathbf{V}_i - n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \mathbf{V}_i \stackrel{\substack{\text{transformácie} \\ \text{indexu}}}{=} n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \mathbf{V}_{i+1} - n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) \mathbf{V}_i = \\ &= n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(t) (\underbrace{\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i}_{\Delta \mathbf{V}_i}) = n \sum_{i=0}^{n-1} \Delta \mathbf{V}_i B_{i,n-1}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} [n \Delta \mathbf{V}_i] B_{i,n-1}(t) \square \end{aligned}$$

teda $\mathbf{B}'(t)$ je Bezierova krivka $(n-1)$ stupňa vo vektorovej zložke E^2 s radiacimi vrcholmi $n\Delta \mathbf{V}_i$, $i = 0, 1, \dots, n-1$



Obr. 1 Derivácia Bèzierovej krivky

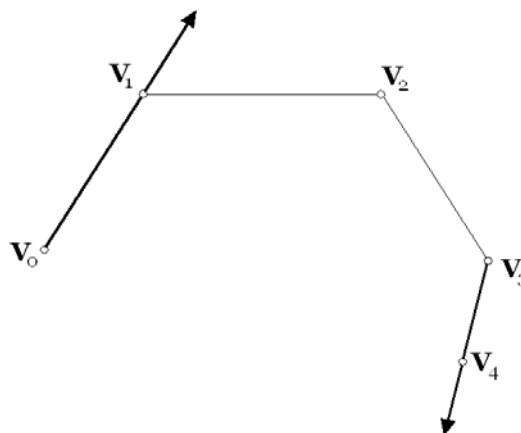
$$\begin{aligned} \underline{Dôkaz 2:} \mathbf{B}''(t) &= n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} \underbrace{\Delta(\Delta \mathbf{V}_i)}_{\Delta(\mathbf{V}_{i+1} - \mathbf{V}_i) = \Delta \mathbf{V}_{i+1} - \Delta \mathbf{V}_i} B_{i,n-2}(t) = \\ &= n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} (\Delta \mathbf{V}_{i+1} - \Delta \mathbf{V}_i) B_{i,n-2}(t) = n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} (\mathbf{V}_{i+2} - 2\mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{V}_i) B_{i,n-2}(t) \end{aligned}$$

Pre koncové body Bezierovej krivky $\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t)\mathbf{V}_i$:

$$\mathbf{B}'(0) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(0) \Delta \mathbf{V}_i = n \Delta \mathbf{V}_0 = n(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0)$$

$$\mathbf{B}'(1) = n \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(1) \Delta \mathbf{V}_i = n(\mathbf{V}_n - \mathbf{V}_{n-1})$$

Geometrická interpretácia 1. derivácie (vektor) v koncových bodoch: je rovnobežná s prvou resp. poslednou stranou riadiaceho polygónu $\mathbf{V}_0\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{n-1}\mathbf{V}_n$.



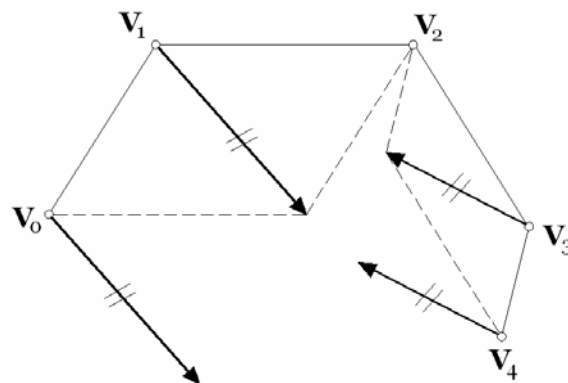
Obr. 2 Geometrická interpretácia prvej derivácie v koncových bodoch

$$\mathbf{B}''(0) = n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} (\mathbf{V}_{i+2} - 2\mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{V}_i) B_{i,n-2}(0) = n(n-1)(\mathbf{V}_2 - 2\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_0)$$

$$\mathbf{B}''(1) = n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} (\mathbf{V}_{i+2} - 2\mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{V}_i) B_{i,n-2}(1) = n(n-1)(\mathbf{V}_{n-2} - 2\mathbf{V}_{n-1} + \mathbf{V}_n)$$

Geometrická interpretácia 2. derivácie (vektor) v koncových bodoch: druhá derivácia je rovnobežná s uhlopriečkou rovnobežníka vytvoreného tromi bodmi: $\mathbf{V}_0\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2$

$$\mathbf{V}_{n-2}\mathbf{V}_{n-1}\mathbf{V}_n$$



Obr. 3 Geometrická interpretácia druhej derivácie v koncových bodoch

1.3.2 Splajnové krivky

Pretože Bèzierove krivky majú nevýhodu v tom, že pri zmene už len jedného vrcholu riadiacej lomenej čiary sa zmení celá Bèzierova krivka, bude výhodné pracovať aj s inými typmi kriviek, ktoré takéto nedostatky odstraňujú, pričom však nie je vylúčené, že sú bez akýchkoľvek nedostatkov. Jednou z takýchto skupín je skupina splajnových kriviek, do ktorej patria:

- **Splajnové krivky** (*fixované (Clamped), prirodzené, cyklické, acyklické, kardinálne*)
- **B-splajnové krivky**
- **β -splajnové krivky**
- **NURBS (=Non Uniform Rational B-Spline)**
- **Catmullove-Romove splajnové krivky**
- **γ -splajnové krivky**
- **N_u -splajnové krivku**

Kapitola 2

Metóda Bèzierovho orezávania

Bèzierove orezávanie (Bèzier clipping) je iteratívna metóda pre vyšetrenie prieniku Bèzierovej krivky s priamkou, ktorá využíva vlastnosť konvexného obalu Bèzierových kriviek a iteratívne orezáva tie časti krivky, ktoré nepretínajú danú priamku. Metóda bola vyvinutá pre raytracing Bèzierových plôch.

Výhody:

- *aplikovateľnosť pre polynómy vyšších stupňov*
- *robustnosť*
- *nájdenie všetkých riešení*
- *rýchly test nepretínania sa*
- *pracovanie iba s lineárnymi rovnicami v každom kroku iterácie*

2.1 Konvexný obal

2.1.1 Motivácia

Tvar množiny bodov v rovine nesie subjektívny aspekt; pre danú množinu bodov môže každý vidieť iný tvar. Jedným z takýchto tvarov množiny bodov v rovine považujeme ich *konvexný obal*.

Konvexný obal si možno predstaviť ako gumené vlákno „natiahnuté“ okolo klinčekov zapichnutých v radiaciach vrcholoch Bèzierovej krivky. Konvexný obal určíme ako uzavretý mnohoúhelník s jeho vnútrom, pozri [5, str. 25-48]

Definícia 2.1 *Konvexnou množinou alebo konvexným [geometrickým] útvarom budeme nazývať ľubovoľnú neprázdnu množinu bodov, ktorá má nasledujúcu vlastnosť: pre každé dva rôzne body množiny patrí množine celá úsečka nimi určená.*

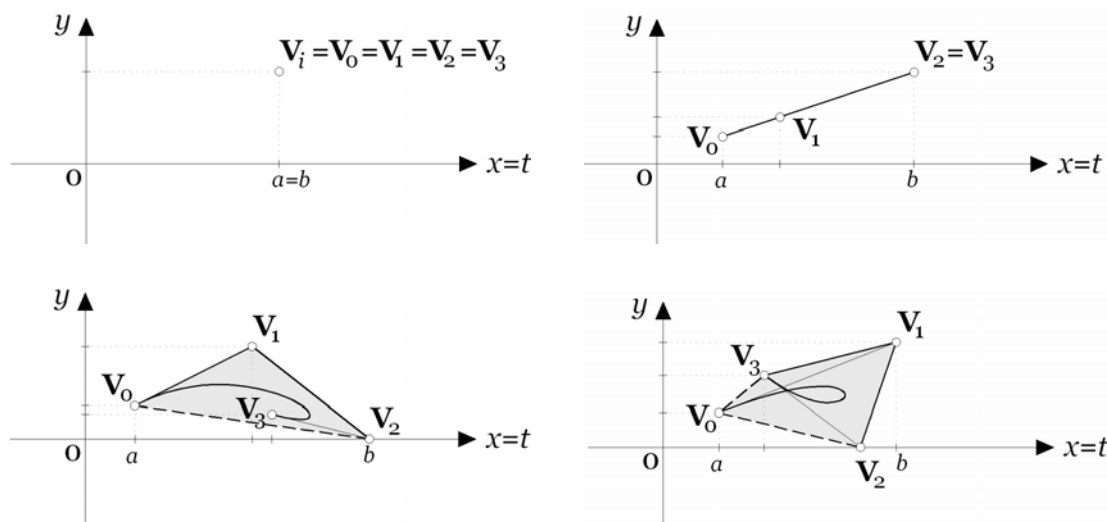
Definícia 2.2 Nech je daná množina bodov M . *Konvexným obalom množiny M* nazývame najmenšiu konvexnú množinu, ktorá obsahuje danú množinu M .

2.1.2 Určenie konvexného obalu

Pretože budeme pracovať iba s konvexným obalom štyroch bodov riadiacej lomenej čiary, určíme konvexný obal Bèzierovej krivky stupňa 3 nasledovne:

Veta 2.1 Konvexný obal štyroch bodov vo všeobecnosti je konvexný štvoruholník, ktorého vrcholmi sú dané body a v špeciálnych prípadoch to môže byť trojuholník; ak sú body kolineárne, môže to byť úsečka alebo bod.

Konvexný obal štyroch bodov ilustrujeme na príkladoch, obr. 4.



Obr. 4 Konvexný obal štyroch bodov v rovine

2.2 Reparametrizácia ľubovoľného intervalu Bèzierovej krivky

Výhodné je pracovať s Bèzierovými krivkami, kde lokálny parameter $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Avšak, vzhľadom na globálny parameter u , môžeme Bèzierovu krivku písať v tvare pre tzv. ľubovoľný interval

$$\hat{\mathbf{B}}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{V}_i B_{i,n} \left(\frac{u - u_{\min}}{u_{\max} - u_{\min}} \right) \quad u \in \langle u_{\min}, u_{\max} \rangle$$

a nazývame to reparametrizáciou základnej Bèzierovej krivky

$$\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{V}_i B_{i,n}(t) \quad t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

2.3 Konverzia medzi reprezentáciami

Pokúsme sa najskôr predpraviť niektoré vzťahy využijúc základné poznatky o Bèzierových krivkách. Napíšme vzťah (1.4) pre kubické krivky v maticovom zápise

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} B_{0,3}(t) & B_{1,3}(t) & B_{2,3}(t) & B_{3,3}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

kde $B_{i,3}(t) = \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i}$, $i \in \{0,1,2,3\}$ sú Bernsteinove polynómy, teda

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} (1-t)^3 & 3(1-t)^2 t & 3(1-t)t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix}.$$

Polynómy (polynomicke krivky) sú zvyčajne myslené ako kombinácie monómov, sú to $1, t, t^2, t^3$ v prípade kubickej krivky. Preto môžeme prepísať vzťah (2.1) takto

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(t) &= \mathbf{V}_0 \cdot (1-t)^3 + \mathbf{V}_1 \cdot 3(1-t)^2 t + \mathbf{V}_2 \cdot 3(1-t)t^2 + \mathbf{V}_3 \cdot t^3 = \\ &= \mathbf{V}_0 + (-3\mathbf{V}_0 + 3\mathbf{V}_1)t + (3\mathbf{V}_0 - 6\mathbf{V}_1 + 3\mathbf{V}_2)t^2 + (-\mathbf{V}_0 + 3\mathbf{V}_1 - 3\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3)t^3 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Použijeme znovu maticový zápis pre krivku $\mathbf{B}(t)$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Vzťahom (2.3) sme uviedli vyjadrenie Bèzierovej kubiky v monomiálnom tvare. Uvažujme dva prípady:

- ak je krivka tretieho stupňa vyjadrená v monomiálnom tvare (podkapitola 2.3.1)
- ak je krivka tretieho stupňa vyjadrená ako polynomicke funkcia s parametrom t (podkapitola 2.3.2)

2.3.1 Konverzia Monomiálny - Bèzierov tvar (CMB) a Bèzierov – Monomiálny tvar (CBM)

Nech je krivka tretieho stupňa vyjadrená v monomiálnom tvare, môžeme písať

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \mathbf{a}_3 t^3 \quad (2.4)$$

Prvky $\mathbf{a}_i$ nazvime *monomiálne riadiace body* [9, str. 156-158]. Toto vyjadrenie dokážeme jednoducho prepísať do maticového zápisu

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Porovnaním zápisov (2.3) a (2.5) dostávame

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_i = M_B \cdot \mathbf{V}_i. \quad (2.6)$$

Teda vstupnými údajmi sú súradnice riadiacich vrcholov $\mathbf{V}_i$ a výstupnými monomiálne riadiace body $\mathbf{a}_i$ krivky $\mathbf{B}(t)$ a výpočet nazývame konverziou Bèzierovej krivky zadanej svojimi riadiacimi vrcholmi na krivku vyjadrenú v monomiálnom tvare, ozn. CBM.

Ak potrebujeme vyjadriť riadiace vrcholy $\mathbf{V}_i$ Bèzierovej kubiky, využijeme *konverziu Bèzierov – Monomiálny tvar*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}_i = M_B^{-1} \cdot \mathbf{a}_i \quad (2.7)$$

kde M_B^{-1} je inverzná matica k matici M_B . Teda vstupnými údajmi sú v tomto prípade monomiálne riadiace body $\mathbf{a}_i$ a výstupnými súradnice riadiacich vrcholov $\mathbf{V}_i$ krivky

¹ Pre doplnenie, v E^2 polynomická krivka stupňa n v monomiálnom tvare sa chápe ako

$$\mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \dots + \mathbf{a}_n t^n = (p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots + p_n t^n, q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \dots + q_n t^n) \text{ kde}$$

$$\mathbf{a}_0 = [p_0, q_0], \dots, \mathbf{a}_n = [p_n, q_n]$$

$\mathbf{B}(t)$ a výpočet nazývame konverziou Bèzierovej krivky zadanej svojimi riadiacimi vrcholmi na krivku vyjadrenú v monomiálnom tvare, ozn. CMB.

V prípade, že je zadaná postupnosť bodov $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$, resp. sú známe monomiálne riadiace body $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, vieme prvky matíc M_B, M_B^{-1} zapísať pomocou kombinačných čísel. Teda predchádzajúci text môžeme zhrnúť do vety 2.2.

Veta 2.2 Nech

$$\mathbf{a} = [\mathbf{a}_0 \ \mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3]^T, \quad \mathbf{V} = [\mathbf{V}_0 \ \mathbf{V}_1 \ \mathbf{V}_2 \ \mathbf{V}_3]^T$$

a nech matice M_B, M_B^{-1} , sú definované nasledovne

$$M_B = M_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i-j} \binom{3}{i} \binom{i}{j} & \text{ak } i \geq j \\ 0 & \text{inak} \end{cases},$$

$$M_B^{-1} = M_{i,j}^{-1} = \begin{cases} \binom{i}{j} / \binom{3}{j} & \text{ak } i \geq j \\ 0 & \text{inak} \end{cases},$$

kde $0 \leq i, j \leq 3$. Teraz dostaneme vyjadrenie pre monomiálne riadiace body $\mathbf{a}_i$ a Bèzierove riadiace vrcholy $\mathbf{V}_i$

$$\mathbf{a}_i = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{3}{i} \binom{i}{j} \mathbf{V}_j, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{V}_i = \sum_{j=0}^i \frac{\binom{i}{j}}{\binom{3}{j}} \mathbf{a}_j.$$

Príklad 2.1 Zapište Bèzierovu krivku danú riadiacimi vrcholmi $\mathbf{V}_0 = [1, 2]$, $\mathbf{V}_1 = [-2, 4]$, $\mathbf{V}_2 = [6, 7]$, $\mathbf{V}_3 = [4, 4]$ v monomiálnom tvare.

Riešenie. Využijeme konverziu CBM takto

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \\ 6 & 7 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -9 & 6 \\ 33 & 3 \\ -21 & -7 \end{bmatrix}.$$

Teda krivku v monomiálnom tvare píšeme $(1 - 9t + 33t^2 - 21t^3, 2 + 6t + 3t^2 - 7t^3)$.

Príklad 2.2 Nech $(4 - 2t + t^2 + 7t^3, 1 + 3t^2 - 4t^3)$ je monomiálne vyjadrenie kubickej krivky. Vyčísľte riadiace Bèzierove vrcholy.

Riešenie. Využijeme konverziu CMB takto

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ \frac{10}{3} & 1 \\ 3 & 2 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}.$$

Takže riadiace body Bèzierovej kubiky sú $\mathbf{V}_0 = [4, 1]$, $\mathbf{V}_1 = [10/3, 1]$, $\mathbf{V}_2 = [3, 2]$, $\mathbf{V}_3 = [10, 0]$.

2.3.2 Konverzia Polynomický – Bèzierov tvar (CPB) a Bèzierov – Polynomický tvar (CBP)

Nech je krivka tretieho stupňa vyjadrená ako graf polynomickej funkcie s parametrom t , môžeme písať

$$y = v(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \quad (2.9)$$

kde a_i sú skaláry. Hovoríme o tzv. *funkcionálnej krivke* $y = v(t)^2$, ktorá sa radí medzi neparametrické krivky [1, str. 48-56].

Pokúsme sa teraz prepísať funkcionálnu polynomickú krivku stupňa 3 do podoby Bèzierovej kubiky. Krivka, ktorú sme opísali v (1.3), môže byť myslená ako parametrická krivka tvaru

$$y = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ v(t) \end{bmatrix}, \quad t \in J. \quad (2.10)$$

Zamerajme sa najskôr na parameter $t \in \langle 0, 1 \rangle$. Nech je daná krivka ako polynomická funkcia s parametrom t , t.j.

$$y = B(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \quad \text{pre } t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

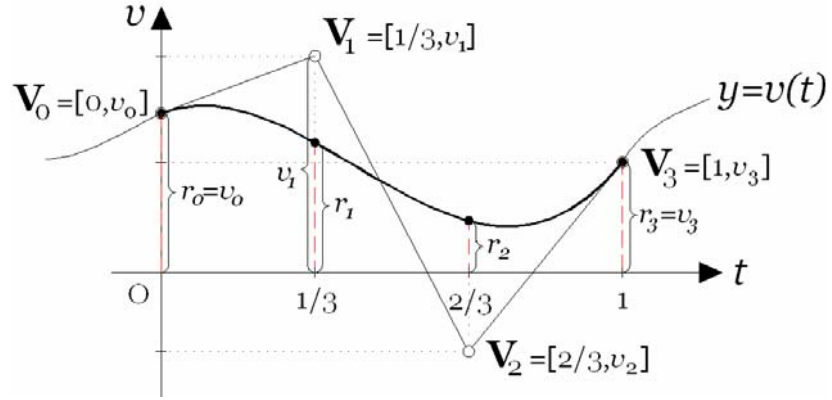
Teda polynomickú krivku vieme podľa vzťahu (2.10) prepísať ako parametrickú krivku príslušného stupňa

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} t \\ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ v(t) \end{bmatrix} \quad \text{pre } t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Ďalej nech $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ sú polohové vektory štyroch bodov, ktorými má prechádzať (ktoré má interpolovať) Bèzierova kubika $\mathbf{B}(t)$ (obr.5). Tieto body $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ sú body krivky pre hodnoty parametra $t_0 = 0, t_1 = 1/3, t_2 = 2/3, t_3 = 1$ (všeobecne $t_n = i/n, i \in \{0, 1, \dots, n\}, n = 3$), t.j.

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{B}\left(\frac{i}{3}\right) = \begin{bmatrix} i/3 \\ a_0 + a_1(i/3) + a_2(i/3)^2 + a_3(i/3)^3 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

² T.j. explicitne vyjadrená krivka



Obr. 5 Konverzia Polynomický – Bèzierov tvar (CPB)

Vychádzajme zo vzťahu (1.3). Keďže parameter $t = i/3$, dostávame

$$\mathbf{B}\left(\frac{i}{3}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{i}{3} & \left(\frac{i}{3}\right)^2 & \left(\frac{i}{3}\right)^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

a pre $i = 0, 1, 2, 3$ môžeme zapísať

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}(0) \\ \mathbf{B}\left(\frac{1}{3}\right) \\ \mathbf{B}\left(\frac{2}{3}\right) \\ \mathbf{B}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & \frac{8}{27} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}(0) \\ \mathbf{B}\left(\frac{1}{3}\right) \\ \mathbf{B}\left(\frac{2}{3}\right) \\ \mathbf{B}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{8}{27} & \frac{12}{27} & \frac{6}{27} & \frac{1}{27} \\ \frac{1}{27} & \frac{6}{27} & \frac{12}{27} & \frac{8}{27} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix}$$

Po dosadení (2.13) do prvej z rovností (2.11) dostávame

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{8}{27} & \frac{12}{27} & \frac{6}{27} & \frac{1}{27} \\ \frac{1}{27} & \frac{6}{27} & \frac{12}{27} & \frac{8}{27} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{M}_{CBP} \cdot \mathbf{V}_i \quad (2.14)$$

Teda vstupnými údajmi sú súradnice riadiacich vrcholov $\mathbf{V}_i$ a výstupnými body $\mathbf{r}_i$ krivky $\mathbf{B}(t)$ a výpočet nazývame konverziou Bèzierovej krivky zadanej svojimi

radiaciami vrcholmi na krivku vyjadrenú ako polynomickeú funkciu, ozn. CBP. K vyčísl'ovaniu radiacich vrcholov $\mathbf{V}_i$, $i = 0, 1, 2, 3$ stačí previesť (2.14) na

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{15}{18} & \frac{54}{18} & -\frac{27}{18} & \frac{6}{18} \\ \frac{6}{18} & -\frac{27}{18} & \frac{54}{18} & -\frac{15}{18} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}_i = M_{CBP}^{-1} \cdot \mathbf{r}_i \quad (2.15)$$

Dostávame inverznú maticu $M_{CBP}^{-1} = M_{CPB}$ pre výpočet zvyšných neznámych vrcholov $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ Bèzierovej krivky. Maticovú rovnosť (2.15) môžeme znovu zapísať ako sústavu rovností

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{V}_1 &= -\frac{15}{18}\mathbf{r}_0 + \frac{54}{18}\mathbf{r}_1 - \frac{27}{18}\mathbf{r}_2 + \frac{6}{18}\mathbf{r}_3 \\ \mathbf{V}_2 &= \frac{6}{18}\mathbf{r}_0 - \frac{27}{18}\mathbf{r}_1 + \frac{54}{18}\mathbf{r}_2 - \frac{15}{18}\mathbf{r}_3 \\ \mathbf{V}_3 &= \mathbf{r}_3. \end{aligned}$$

Teda vstupnými údajmi sú body $\mathbf{r}_i$ krivky $\mathbf{B}(t)$ a výstupnými súradnice radiacich vrcholov $\mathbf{V}_i$ a výpočet nazývame konverziou Bèzierovej krivky zadanej svojimi radiaciami vrcholmi na krivku vyjadrenú ako polynomickeú funkciu, ozn. CPB. Priamo z (2.15) vyplýva, že pre prvé súradnice bodov $\mathbf{V}_i$ dávajú rovnosti hodnoty $i/3$, kde $i \in \langle 0, 1 \rangle$. Teda výpočet sa zjednoduší na výpočet iba druhých súradníc bodov $\mathbf{V}_i$ a môžeme písať

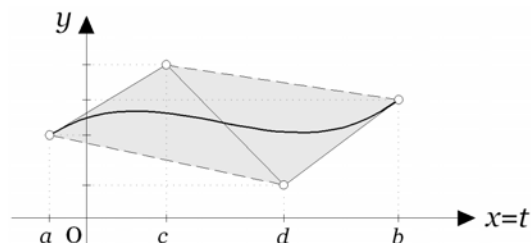
$$\begin{aligned} v_0 &= r_0 \\ v_1 &= -\frac{15}{18}r_0 + \frac{54}{18}r_1 - \frac{27}{18}r_2 + \frac{6}{18}r_3 \\ v_2 &= \frac{6}{18}r_0 - \frac{27}{18}r_1 + \frac{54}{18}r_2 - \frac{15}{18}r_3 \\ v_3 &= r_3. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Ak by sme uvažovali o krivke (ako polynomickej funkcii) na ľubovoľnom intervale $t \in \langle a, b \rangle$, hodnoty parametra t sa pre určovanie bodov $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ (a tým aj bodov radiacej lomenej čiary $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$) zmenia z $t = \frac{i}{3}$, kde $i = \{0, 1, 2, 3\}$ na $t = a + \frac{i(b-a)}{3}$ pre $i = \{0, 1, 2, 3\}$. Konkrétne pri Bèzierovom orezávaní v E^2 [kapitola 3.1] budeme pri každej iterácii danej krivky využívať metódu konverzie CPB pri výpočte druhých súradníc tých neznámych vrcholov, ktoré odpovedajú hodnotám pa-

rametra $t = a + \frac{i(b-a)}{3}$, kde $i = \{1, 2\}$, teda okrem prvého a posledného vrcholu, pretože tie sú dopredu známe. Je to rýchly a nenáročný výpočet, pri ktorom však nesmieme zabúdať na fakt, že spočiatku pracujeme s intervalom $t \in \langle a, b \rangle$, no neskôr sa $t \in \langle a_j, b_j \rangle \subset \langle a, b \rangle$, $j \in \{0, 1, \dots\}$. Pri delení intervalu $\langle a, b \rangle$ dostávame usporiadanú štvoricu hodnôt

$$\left\langle a, a + \frac{1 \cdot (b-a)}{3}, a + \frac{2 \cdot (b-a)}{3}, b \right\rangle = \left\langle a, \frac{2a+b}{3}, \frac{a+2b}{3}, b \right\rangle = \langle a, c, d, b \rangle,$$

ako je uvedené na obrázku 6.



Obr. 6 Delenie intervalu $\langle a, b \rangle$ polynomickej funkcie

Príklad 2.3 Vypočítajte Bèzierove riadiace vrcholy polynómu $y = v(t) = 2 - 16t + 14t^2 - 7t^3$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$.

Riešenie. Pre hodnoty parametra $t_0 = 0, t_1 = 1/3, t_2 = 2/3, t_3 = 1$ vypočítajme body $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$, sú to body na krivke.

$$v(0) = 2 - 16 \cdot 0 + 24 \cdot 0^2 - 7 \cdot 0^3 = 2$$

$$\mathbf{r}_0 = [0, 2]$$

$$v(1/3) = 2 - 16 \cdot (1/3) + 24 \cdot (1/3)^2 - 7 \cdot (1/3)^3 = -25/27$$

$$\mathbf{r}_1 = [1/3, -25/27]$$

$$v(2/3) = 2 - 16 \cdot (2/3) + 24 \cdot (2/3)^2 - 7 \cdot (2/3)^3 = -2/27$$

$$\mathbf{r}_2 = [2/3, -2/27]$$

$$v(1) = 2 - 16 \cdot 1 + 24 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1^3 = 3$$

$$\mathbf{r}_3 = [1, 3]$$

Využijeme konverziu CPB takto

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{15}{18} & \frac{54}{18} & \frac{27}{18} & \frac{6}{18} \\ \frac{6}{18} & \frac{27}{18} & \frac{54}{18} & \frac{15}{18} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{-25}{27} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{27} \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{-10}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Takže riadiace body Bèzierovej kubiky sú $\mathbf{V}_0 = [0, 2]$, $\mathbf{V}_1 = [1/3, -10/3]$, $\mathbf{V}_2 = [2/3, -2/3]$, $\mathbf{V}_3 = [1, 3]$, ktorá interpoluje body $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$.

2.4 Geometrická konštrukcia bodov V_1, V_2

Veta 2.3 Bod radiaceho polygónu V_1 je priesečníkom priamky $m: x-1/3=0$ s dotyčnicou n ku grafu funkcie $B(t)$ v bode V_0 .

Dôkaz: Derivácia krivky v bode V_0 (t.j. pre $t=0$) má tvar

$$B'(0) = 3(V_1 - V_0).$$

Napišme rovnice priamok m, n . Priamka m je daná rovnicou

$$m: x - 1/3 = 0.$$

Preto ak má bod V_1 incidovať s priamkou m , jeho prvá súradnica je tým jednoznačne určená; $v_1^x = 1/3$. Vyplýva to i zo vzorca (2.16). Priamku n zapíšeme v parametrickom vyjadrení $n: X = V_0 + 3(V_1 - V_0)s$, kde $s \in \mathbb{R}$ a $(V_1 - V_0): (1/3, v_1^y - v_0^y)$:

$$x = 0 + 3 \cdot \frac{1}{3} s$$

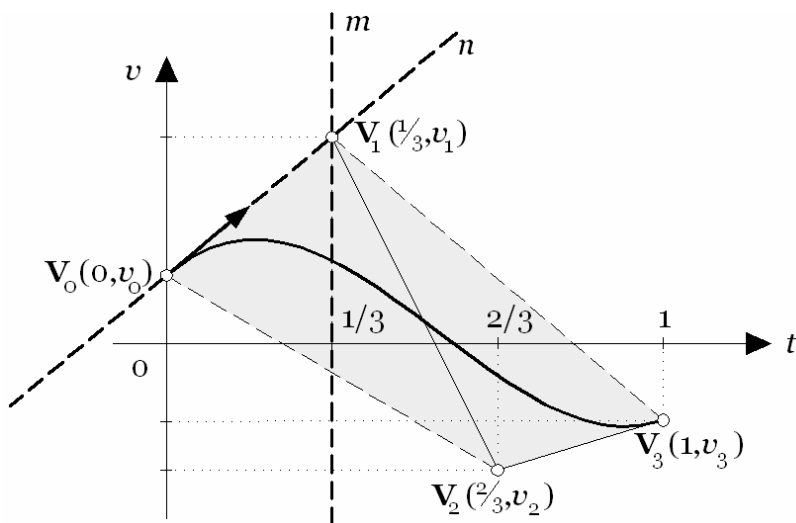
$$y = v_0^y + 3 \cdot (v_1^y - v_0^y) s, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Zistíme prienik priamok m, n

$$m \cap n: y = v_0^y + 3 \cdot (v_1^y - v_0^y) \cdot 1/3 = v_1^y$$

$$x = 1/3.$$

Bod so súradnicami $[1/3, v_1^y]$ je prienikom priamok m a n (obr.7). $\square$



Obr. 7 Geometrická konštrukcia bodov V_1, V_2

Analogicky sa dá dokázať nasledujúca veta.

Veta 2.3 Bod radiaceho polygónu $\mathbf{V}_2$ je priesečníkom priamky $p: x - 2/3 = 0$ s dotyčnicou q ku grafu funkcie $\mathbf{B}(t)$ v bode $\mathbf{V}_3$.

Kapitola 3

Algoritmy Bèzierovho orezávania

3.1 Korene polynómov

Problematika hľadania koreňov polynómov spočíva v hľadaní prieniku osi t (stotožnená s osou x) s grafom daného polynómu (polynomickej funkcie). Našou úlohou bude nájsť množinu všetkých koreňov využívúc tzv. *metódu orezávania*³ konvexného obalu krivky (obr.13); pozri [10]. Krivka je zadaná ako polynomická funkcia s parametrom t , t.j.

$$y = v(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n, \quad t \in \langle a, b \rangle$$

Proces vyšetřovania koreňov polynómov uvedieme na príklade kubickej Bèzierovej krivky $\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) \mathbf{V}_i$, pre $t \in \langle a, b \rangle$, teda aj polynomickej funkcie stupňa 3 ($v(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$).

Aby sme vylúčili tie prípady polôh kriviek, kedy nie je potrebné počítať prienik krivky a priamky (parametrickej osi t), urobíme predspracovanie týmito dvomi testami.

Test A

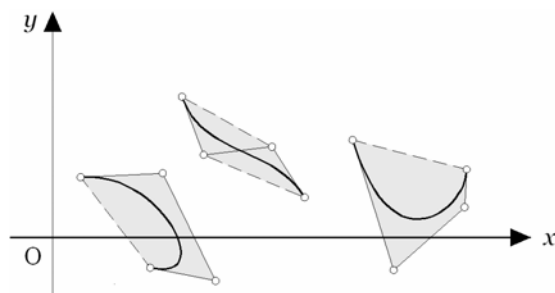
(vylúčenie prípadov metódou prieniku konvexného obalu Bèzierovej krivky a parametrickej osi x)

Parametrická os x v rovine je daná rovnicou $y = 0$ ($ax + by + c = 0$, kde $a = c = 0$) a rozdeľuje rovinu na dve polroviny.

³ Z anglického *clipping*

Tvrdenie 3.1 Ak body roviny $X=[x, y]$ spĺňajú podmienku $ax+by+c > 0$, patria jednej polrovine, ak však spĺňajú podmienku $ax+by+c < 0$, patria do druhej polroviny.

Inak povedané, ak hodnoty druhých súradníc bodov $X=[x, y]$ sú všetky väčšie ako nula, patria jednej polrovine; ak sú všetky menšie ako nula, patria druhej polrovine. Na základe tohto tvrdenia vyriešime, či má krivka prienik s osou x . Ak všetky body $V_i=[x_i, y_i]$, $i \in 0, \dots, 3$ riadiaceho polygónu ležia v jednej polrovine, t.j. $\forall i: ax_i + by_i + c > 0$, resp. $\forall i: ax_i + by_i + c < 0$, os x nepretína konvexný obal riadiacich vrcholov krivky. Pretože krivka leží v konvexnom obale svojich riadiacich vrcholov, os x nepretína ani krivku. V prípade, ak aspoň jeden bod riadiaceho polygónu krivky leží v opačnej polrovine (t.j. konvexný obal krivky má prienik s osou x), predpokladáme prienik samotnej krivky s danou osou x . Týmto spôsobom vylúčime „nehodné“ prípady. Na ilustráciu uvádzame niektoré prípady, obr. 8.



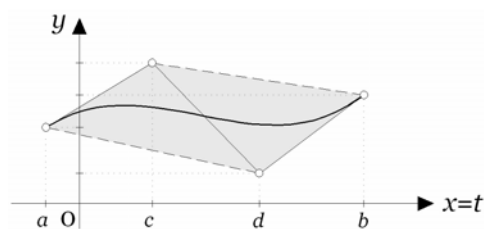
Obr. 8 Prienik konvexného obalu Bèzierovej krivky a parametrickej osi x

Test B

(prieniku konvexného obalu Bèzierovej krivky s osou t)

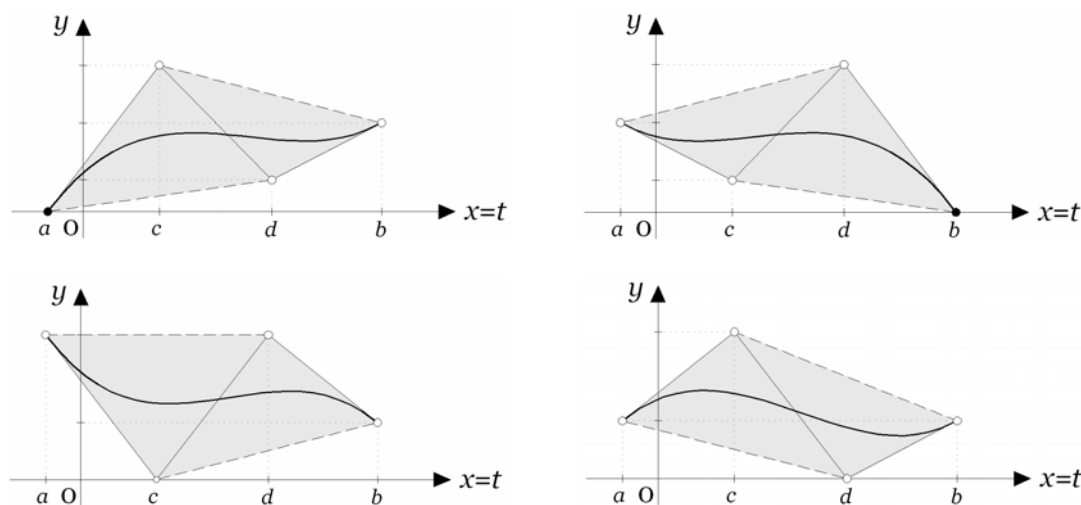
Test využíva, ako z názvu vyplýva, vlastnosť konvexného obalu Bèzierových kriviek z vety 1.3.II. Na základe tejto vlastnosti vieme zistiť, v ktorých prípadoch krivka určite nepretína os t , resp. ak pretína, tak s istotou dokážeme vyriešiť iba prípady, keď prienikom konvexného obalu s osou t je začiatočný alebo koncový bod riadiacej lomenej čiary, a teda aj bod krivky. Na obrázkoch 9 – 11 sú ilustrované niektoré prípady, konkrétne tie, pre ktoré konvexný obal pretína os t v špecifickej oblasti, a to napr. vo vrcholoch, stranách konvexného obalu a niektorých úsečkách tvorených vrcholmi konvexného obalu. Konvexný obal riadiacich vrcholov Bèzierovej krivky označíme KO. Pre Bèzierovu kubiku môžu nastať nasledovné prípady:

- $KO \cap t = \emptyset$; vtedy krivka nepretína os t , t.j. $B(t) \cap t = \emptyset$



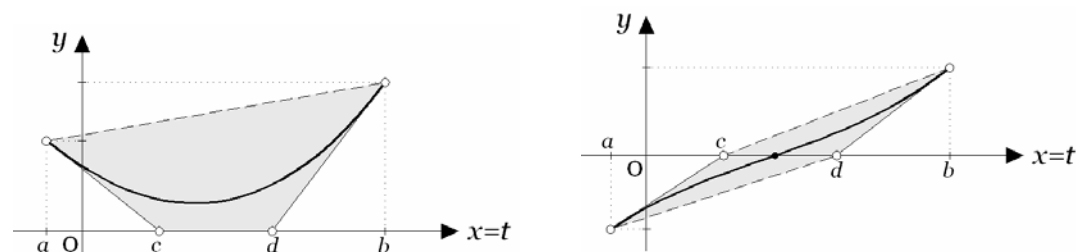
Obr. 9 Prienik konvexného obalu Bèzierovej krivky s osou t – prázdna množina

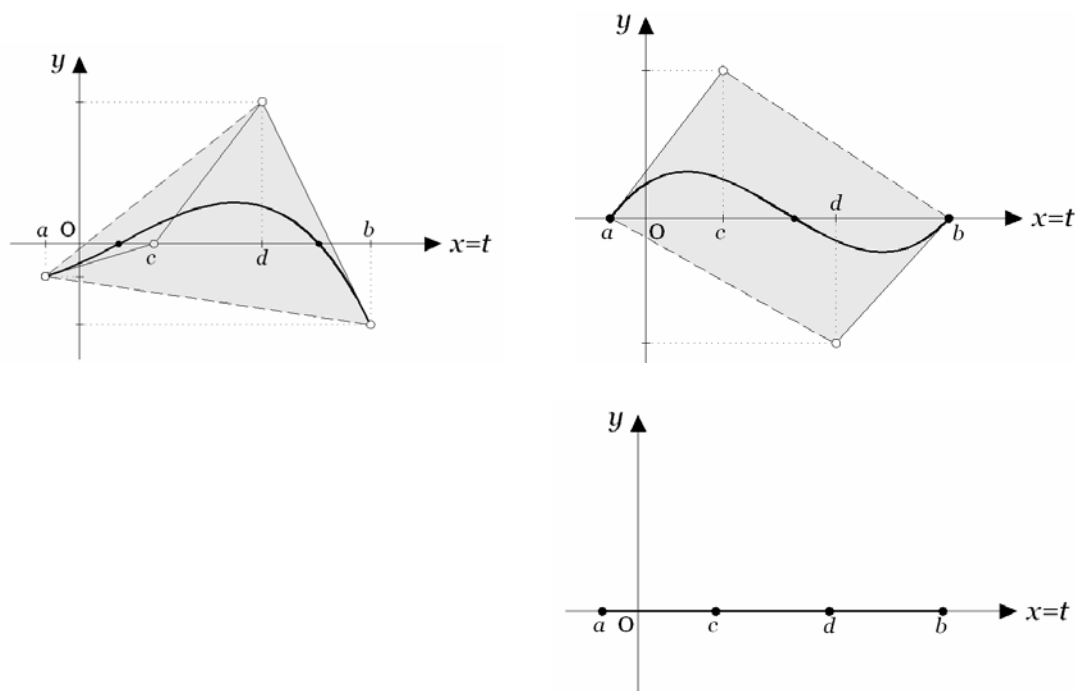
- $KO \cap t = \{V_i\}, i \in \{0, \dots, 3\}$
 $\begin{cases} \text{ak } i=1 \vee i=2, \text{ tak } B(t) \cap t = \emptyset \\ \text{ak } i=0 \vee i=3, \text{ tak } B(t) \cap t = \{t_i\} \end{cases}$



Obr. 10 Prienik konvexného obalu Bèzierovej krivky s osou t – jeden bod

- $KO \cap t = \text{úsečka } PQ$; $B(t) \cap t$ môže byť $\emptyset$, $\{t_1, t_2, t_3\}$, $\{t_1, t_2\}$, $\{t_1\}$, $\langle a, b \rangle$, kde $t_1, t_2, t_3 \in \langle a, b \rangle$



Obr. 11 Prienik konvexného obalu Bèzierovej krivky s osou t – úsečka

Vráťme sa späť ku koreňom polynómov. Nech je daný polynóm $y = v(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$, $t \in \langle a, b \rangle$.

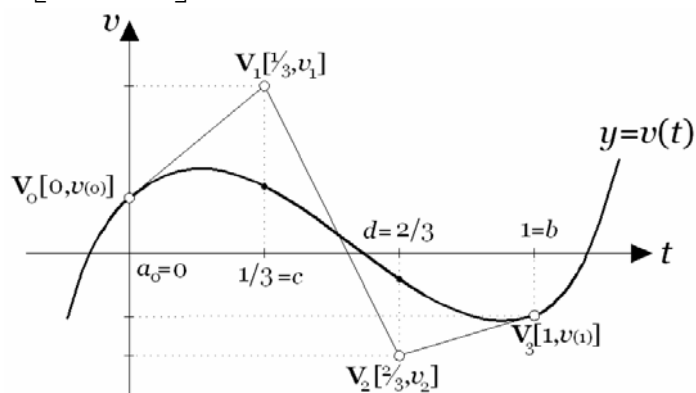
PT algoritmus (Polynom-Parametric axis t algorithm):

1. Určenie vrcholov riadiacej lomenej čiary pre $t_0 = a$ a pre $t_3 = b$:

$$\mathbf{V}_0 = [a, v(a)], \mathbf{V}_3 = [b, v(b)]$$

a CPB – t.j. proces zistenia zvyšných Bèzierových riadiacich vrcholov

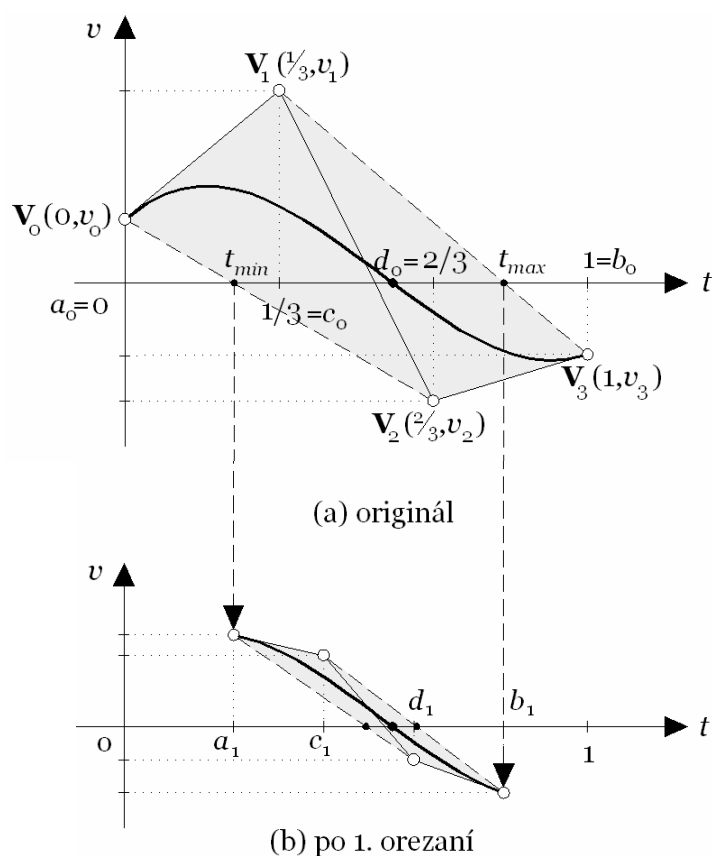
$$\mathbf{V}_1 = \left[\frac{2a+b}{3}, v_1 \right], \mathbf{V}_2 = \left[\frac{a+2b}{3}, v_2 \right] \text{ pre } t_1 = \frac{2a+b}{3}, t_2 = \frac{a+2b}{3}$$

Obr. 12 Zadanie CL algoritmu a konverzia CPB pre t intervalu $\langle a, b \rangle$

2. Určenie konvexného obalu krivky $\mathbf{B}(t)$
3. Test A
(vylúčenie „nevhodných“ prípadov metódou prieniku konvexného obalu Bèzierovej krivky a parametrickej osi x)
4. Test B
(prienik konvexného obalu Bèzierovej krivky s osou t)
Ak $KO \cap t$ je úsečka PQ ,
tak body P, Q ležia na priamke t a majú súradnice $P = [t_{\min}, 0]$,
 $Q = [t_{\max}, 0]$ a prejsť na krok 5,
inak **ak** $KO \cap t$ je bod V_i , $i \in \{0, \dots, 3\}$,
tak **ak** $i = 0 \vee i = 3$,
tak $\mathbf{B}(t) \cap t = \{t_i\}$,
inak $\mathbf{B}(t) \cap t = \emptyset$
inak $\mathbf{B}(t) \cap t = \emptyset$ a algoritmus skončí.
5. Pre hodnoty $t_{\min}, t_{\max}$, vyčíslit' body odpovedajúce na krivke $\mathbf{B}(t_{\min})$,
 $\mathbf{B}(t_{\max})$ zadanej krivky $\mathbf{B}(t)$. Dostávame novú „orezanú“ krivku.
6. Test C
(percentuálne porovnanie zmeny novovzniknutého intervalu $\langle t_{\min}, t_{\max} \rangle$
voči pôvodnému $\langle a, b \rangle$, resp. predchádzajúcemu intervalu)⁴
Ak $|t_{\max} - t_{\min}| \leq \delta |b - a|$,
tak chod' na krok 7,
inak pre $t_0 = \frac{t_{\max} - t_{\min}}{2}$ rozdel' Bèzierovu krivku $\mathbf{B}(t)$ na dve nové
Bèzierove krivky $\mathbf{B}^1(t)$, $t \in \langle t_{\min}, t_0 \rangle$, $\mathbf{B}^2(t)$, $t \in \langle t_0, t_{\max} \rangle$ a späť na
krok 1 pre obidve nové krivky.
7. Späť na krok 2. *PT algoritmus* sa zastaví, keď vzdialenosť $|t_{\min}, t_{\max}| < \varepsilon$.

Parametre δ, ε sú dopredu pevne zvolené, napr. vzdialenostný parameter intervalu $\langle t_{\min}, t_{\max} \rangle$ po orezaní môže mať hodnotu $\varepsilon = 0,005$ a parameter percentuálnej zmeny novovzniknutého intervalu voči predchádzajúcemu $\delta = 0,85$. Hodnoty parametrov sú zatiaľ odhadnuté. Ich presnejšie odhady budú známe až po experimentálnej časti projektu.

⁴ Inak povedané, ak sa pri opakovanom orezávaní nezmenil predchádzajúci interval $\langle t_{\min}, t_{\max} \rangle$ voči novovzniknutému o viac ako napr. 15%, môžeme predpokladať viac koreňov polynómu. Vtedy sa interval rozdelí na 2 menšie intervaly a pokračujeme s orezávaním pre každú časť samostatne.



Obr. 13 PT algoritmus

Musíme pripomenúť, že výstupnými hodnotami *PT algoritmu* sú najviac tri (0 až 3) korene polynómu. Pretože algoritmus dáva pri každom orezaní ako návratovú hodnotu interval $\langle t_{\min}, t_{\max} \rangle$, skutočnosť, že nastane situácia, keď $|t_{\min}, t_{\max}| < \varepsilon$, budeme považovať za cieľovú a ako približnú hodnotu koreňa polynómu prehlásime stred intervalu $\langle t_{\min}, t_{\max} \rangle$.

3.2 Prieniky typu KRIVKA – PRIAMKA

Problém vyšetřovania prieniku priamky s krivkou sa budeme snažiť previesť na typ úlohy hľadania koreňov polynómov. Základným krokom algoritmu bude vytvorenie „novej“ Bèzierovej krivky; presnejšie budeme určovať jej riadiace vrcholy $\mathbf{D}_i = \left[\frac{i}{3}, d_i \right]$, $i = 0, 1, 2, 3$ tak, že súradnica d_i bude vyjadrovať orientovanú vzdialenosť riadiaceho vrcholu $\mathbf{V}_i$ od priamky. Samozrejme, aj tu uvádzame príklad Bèzierovej kubiky.

Nech je daná Bèzierova krivka $\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) \mathbf{V}_i$, kde $\mathbf{V}_i = [v_i^x; v_i^y]$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$, teda jej parametrické vyjadrenie

$$x(t) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) v_i^x, \quad y(t) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) v_i^y \quad (3.1)$$

a nech priamka l je zadaná implicitne

$$l: ax + by + c = 0.$$

Koeficienty a, b, c sú upravené tak, aby platilo $a^2 + b^2 = 1$. Vyšetrujme bod na Bèzierovej krivke tak, aby zároveň patril priamke l , t.j. bod, ktorý má od priamky l nulovú vzdialenosť. Pre každý bod krivky vieme vyjadriť jeho orientovanú vzdialenosť

$$d(t) = ax(t) + by(t) + c \quad (3.2)$$

Po dosadení parametrických rovníc (3.1) Bèzierovej krivky do (3.2) dostávame

$$\begin{aligned} d(t) &= a \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) v_i^x + b \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) v_i^y + c \underbrace{\sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t)}_{=1} = \\ &= \sum_{i=0}^3 \underbrace{(av_i^x + bv_i^y + c)}_{d_i} B_{i,3}(t) = \sum_{i=0}^3 d_i B_{i,3}(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Funkciu $d(t)$ nazývame *vzdialenostnou funkciou* a je to vlastne *Bèzierova funkcia* tretieho stupňa. V (3.3) sme označili

$$d_i = av_i^x + bv_i^y + c \quad (3.4)$$

a pre výpočet orientovanej vzdialenosti bodu od priamky sa používa vzťah

$$d_i = \frac{av_i^x + bv_i^y + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (3.5)$$

V našom prípade $a^2 + b^2 = 1$, preto (3.4) bude určovať orientovanú vzdialenosť d_i riadiaceho vrcholu $\mathbf{V}_i$ od priamky l . Predchádzajúci postup budeme považovať za dôkaz nasledujúcej lemy.

Lema 3.1 Pre orientovanú vzdialenosť $d(t)$ bodu $\mathbf{B}(t) = [x(t), y(t)]$ Bèzierovej krivky $\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) \mathbf{V}_i$, kde $\mathbf{V}_i = [v_i^x; v_i^y]$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$ od priamky $l: ax + by + c = 0$ platí

$$\begin{aligned} d(t) &= \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) d_i, \text{ kde} \\ d_i &= \frac{av_i^x + bv_i^y + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad i \in 0, \dots, n \end{aligned}$$

je orientovaná vzdialenosť bodu $\mathbf{V}_i$ od priamky l . Teda funkcia $d(t)$ je Bèzierova polynomická funkcia.

Veta 3.1 Bod $\mathbf{B}(t)$ Bèzierovej krivky $\mathbf{B}(t) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) \mathbf{V}_i$, kde $\mathbf{V}_i = [v_i^x; v_i^y]$, $t \in \langle 0,1 \rangle$ je priesečníkom krivky s priamkou $l: ax + by + c = 0$ práve vtedy, keď číslo $t \in \langle 0,1 \rangle$ je koreňom Bèzierovej polynomickej funkcie $d(t) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) d_i$, kde

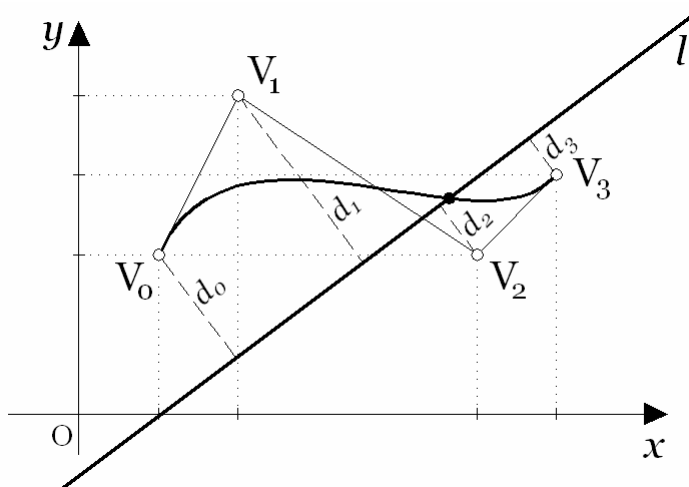
$$d_i = \frac{av_i^x + bv_i^y + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}, i \in 0, \dots, n.$$

Dôkaz. Veta je zrejším dôsledkom lemy 3.1.

Takže pri vyšetrovaní prieniku krivky a priamky budeme určovať hodnotu parametra t (ak existuje), pre ktorú $d(t) = 0$, t.j. „vzdialenosť“ bodu $\mathbf{B}(t)$ od priamky l je nulová. Znamená to využiť *PT algoritmus*. Pred jeho zaradením potrebujeme dodať vstupné hodnoty. Zostavíme *CL algoritmus*, ktorého dátové vstupné hodnoty sú: riadiace body $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ a priamka $l: ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 = 1$ (obr. 14).

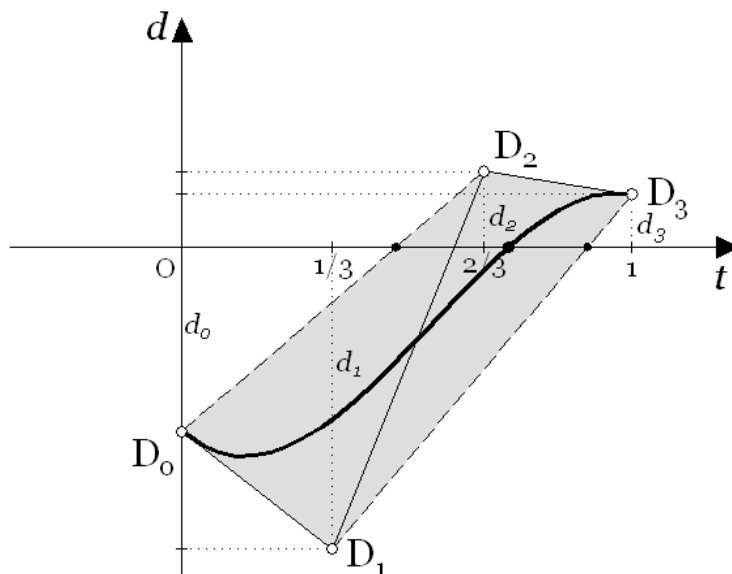
CL algoritmus (Curve-Line algorithm):

1. Vyčíslenie orientovanej vzdialenosti d_i (3.4) riadiacich vrcholov Bèzierovej krivky od danej priamky l (obr. 11 - d_0, d_1, d_2, d_3)



Obr. 14 Zadanie CL algoritmu a vyčíslenie orientovanej vzdialenosti d_i

2. Určenie riadiacich vrcholov $\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3$ novej krivky, kde $\mathbf{D}_i = \left[\frac{i}{3}; d_i \right]$ pre $i = 0, 1, 2, \dots, n$
3. *PT algoritmus* pre funkciu $d(t)$ (obr. 15 ilustruje výsledok *PT algoritmu*)

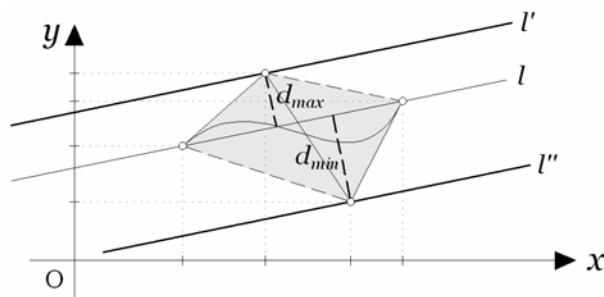


Obr. 15 CL algoritmus

3.3 Prieniky typu KRIVKA – KRIVKA

Hlavným krokom pripravovaného algoritmu bude transformácia úlohy *prieniku typu krivka - krivka* na typ úlohy prieniku priamok, čo urýchli čas výpočtu algoritmu. Druhým dôležitým krokom je zostrojenie *hrubej priamky*⁵. Určíme ju podľa nasledovnej definície.

Definícia 3.1 Hrubou priamkou Bèzierovej krivky v E^2 nazývame každý rovinný pás, v ktorom ležia všetky body krivky, pričom hraničné priamky pásu sú rovnobežné s priamkou spájajúcou prvý a posledný vrchol riadiaceho mnohoúhelníka krivky. (obr. 16)



Obr. 16 Hrubá priamka krivky

Podľa definície 3.1 má Bèzierova krivka nekonečne veľa hrubých priamok. Naším cieľom je skonštruovať čo možno najužšiu.

⁵ Z anglického *Fat Line*

3.3.1 Konštrukcia hrubej priamky

Nech sú v rovine dané riadiace body $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ Bèzierovej krivky. Zostrojme priamku l spájajúcu prvý bod $\mathbf{V}_0$ a posledný bod $\mathbf{V}_3$ riadiaceho polygónu. Priamka $l = \mathbf{V}_0\mathbf{V}_3$ má rovnicu $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 = 1$. Pre každý vrchol riadiacej lomenej čiary použijeme vzťah (3.4) na výpočet orientovanej vzdialenosti d_i bodu $\mathbf{V}_i$ od priamky l ; dostávame množinu čísel $\{d_0, d_1, d_2, d_3\}$. Z tejto množiny vyberieme minimálnu a maximálnu hodnotu

$$d_{\min} = \min \{d_0, d_1, d_2, d_3\}$$

$$d_{\max} = \max \{d_0, d_1, d_2, d_3\}.$$

Veta 3.2 Hrubá priamka krivky $\sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) \mathbf{V}_i$ je množina bodov $X \in E^2$, pre ktoré

$$d_{\min} \leq d_X \leq d_{\max},$$

kde d_X je orientovaná vzdialenosť bodu X od priamky l .

Veta 3.3 Ak má priamka $l = \mathbf{V}_0\mathbf{V}_3$ normovanú rovnicu $ax + by + c = 0$ ($a^2 + b^2 = 1$), tak hraničné priamky l' a l'' hrubej priamky krivky zostrojíme tak, aby boli rovnobežné s priamkou l a ich orientovaná vzdialenosť od priamky l je $d_{\min}$, $d_{\max}$ a ich rovnice sú

$$l': ax + by + c + d_{\max} = 0$$

$$l'': ax + by + c + d_{\min} = 0.$$

Takto zostrojená hrubá priamka (rovinný pás s hraničnými priamkami l' , l'') obsahuje všetky body KO. Pripomínáme, že veta 3.2 platí pre Bèzierovu krivku ľubovoľného stupňa.

Pre kvadratickú a kubickú Bèzierovu krivku však vieme určiť ešte užší rovinný pás $l'l''$. Dôvodom je urýchlenie algoritmu vyšetrenia prieniku dvoch Bèzierových kriviek, pozri [8, str. 26-28].

3.3.2 Kvadratická Bèzierova krivka a jej užšia hrubá priamka

Pozrime sa na orientované vzdialenosti bodov kvadratickej Bèzierovej krivky. Vychádzajme zo vzťahu (3.3) vzdialenostnej funkcie a prepíšme ho pre kvadratickú Bèzierovu krivku

$$d(t) = \sum_{i=0}^2 \underbrace{(av_i^x + bv_i^y + c)}_{d_i} B_{i,2}(t) = \sum_{i=0}^2 d_i B_{i,2}(t)$$

Nech V_0, V_1, V_2 sú riadiace body Bèzierovej krivky. Určme vzdialenostnú funkciu

$$d(t) = d_0 B_{0,2}(t) + d_1 B_{1,2}(t) + d_2 B_{2,2}(t).$$

Hodnoty $d_0 = d_2 = 0$, pretože riadiace vrcholy V_0, V_2 sú bodmi priamky l , a teda môžeme zapísať

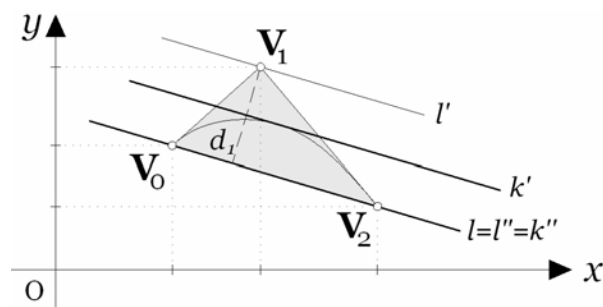
$$d(t) = d_1 B_{1,2}(t) = d_1 2t(1-t).$$

Nájdением extrémov kvadratickej funkcie $d(t)$ na intervale $\langle a, b \rangle$ získame hodnoty

$$d_{\min} = \min \left\{ 0, \frac{d_1}{2} \right\}$$

$$d_{\max} = \max \left\{ 0, \frac{d_1}{2} \right\},$$

ktorými vieme ohraničiť rovinný pás $k'k''$ užšia než hrubá priamka z vety 3.3 (obr. 17).



Obr. 17 Užšia hrubá priamka kvadratickej Bèzierovej krivky

3.3.3 Kubická Bèzierova krivka a jej užšia hrubá priamka

Vychádzajme znova zo vzťahu (3.3) pre vyjadrenie orientovaných vzdialeností a zapíšme vzdialenostnú funkciu pre kubickú Bèzierovu krivku

$$d(t) = \sum_{i=0}^3 d_i B_{i,3}(t), \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Nech V_0, V_1, V_2, V_3 sú riadiace body Bèzierovej krivky. Určme vzdialenostnú funkciu

$$d(t) = d_0 B_{0,3}(t) + d_1 B_{1,3}(t) + d_2 B_{2,3}(t) + d_3 B_{3,3}(t).$$

Hodnoty $d_0 = d_3 = 0$, pretože riadiace vrcholy V_0, V_3 sú bodmi priamky l a teda môžeme zapísať

$$d(t) = d_1 B_{1,3}(t) + d_2 B_{2,3}(t)$$

$$d(t) = d_1 3t(1-t)^2 + d_2 3t^2(1-t) = 3t(1-t) \cdot [d_1(1-t) + d_2 t].$$

Tu už musíme uvažovať dva prípady pre orientované vzdialenosti d_1, d_2

- ✓ ak $d_1 d_2 > 0$, t.j. body V_1, V_2 ležia v jednej polrovine vzhľadom na l , dostávame

$$\min\{0, d_1, d_2\} \leq (1-t)d_1 + td_2 \leq \max\{0, d_1, d_2\}$$

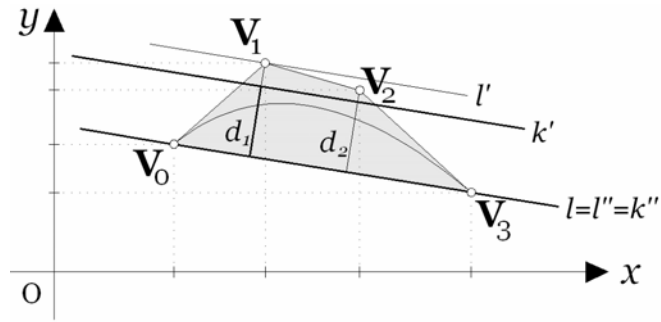
$$\text{a} \quad 3t(1-t) \min\{0, d_1, d_2\} \leq d(t) \leq 3t(1-t) \max\{0, d_1, d_2\}$$

Nájďme extrémny funkcie $h(t) = 3t(1-t)$. Funkcia $h(t)$ má extrém pre $t = \frac{1}{2}$

a nadobúda hodnotu $h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$. Rovinný pás $k'k''$ vieme ohraničiť týmito hodnotami

$$d_{\min} = \min\left\{0, \frac{3}{4}d_1, \frac{3}{4}d_2\right\}$$

$$d_{\max} = \max\left\{0, \frac{3}{4}d_1, \frac{3}{4}d_2\right\} \quad (\text{obr. 18})$$



Obr. 18 Užšia hrubá priamka kubickéj Bèzierovej krivky a_i

- ✓ ak $d_1 d_2 \leq 0$, t.j. body V_1, V_2 ležia v rôznych polrovinách vzhľadom na l , uvažujme prípad keď $d_1 \leq 0, d_2 \geq 0$

$$(1-t)d_1 \leq (1-t)d_1 + td_2 \leq td_2$$

$$\text{a} \quad 3t(1-t)^2 d_1 \leq d(t) \leq 3t^2(1-t)d_2$$

Nájďme extrémny funkcií $m(t) = 3t(1-t)^2, n(t) = 3t^2(1-t)$. Funkcia $m(t)$

má extrémny pre $t_1 = 0, t_2 = \frac{1}{3}$ a nadobúda v nich hodnoty $m(0) = 0, m\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}$

a funkcia $n(t)$ má extrémny pre $t_3 = 0, t_4 = \frac{2}{3}$ a nadobúda v nich hodnoty

$n(0) = 0, n\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$. Z toho vyplýva

$$d_{\min} = \min\left\{0, \frac{4}{9}d_1\right\}, \quad d_{\max} = \max\left\{0, \frac{4}{9}d_2\right\}.$$

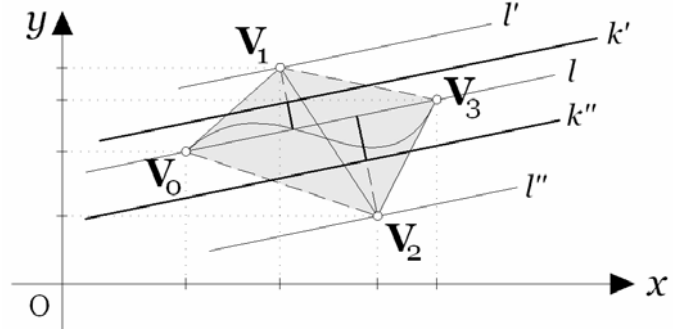
Analogicky pre $d_1 \geq 0, d_2 \leq 0$ dostávame

$$d_{\min} = \min \left\{ 0, \frac{4}{9} d_2 \right\}, \quad d_{\max} = \max \left\{ 0, \frac{4}{9} d_1 \right\}.$$

Takže môžeme písať spoločne pre $d_1 d_2 \leq 0$

$$d_{\min} = \min \left\{ 0, \frac{4}{9} d_1, \frac{4}{9} d_2 \right\}$$

$$d_{\max} = \max \left\{ 0, \frac{4}{9} d_1, \frac{4}{9} d_2 \right\} \quad (\text{obr. 19})$$



Obr. 19 Užšia hrubá priamka kubickej Bèzierovej krivky b_j

Pri hľadaní spoločných bodov dvoch Bèzierových kriviek v rovine budeme striedavo orezávať jednu z nich hrubou priamkou druhej krivky, prvú krivku môže preťať iba tá časť druhej, ktorá leží v hrubej priamke prvej krivky.

Podobne ako pri predchádzajúcom algoritme prieniku priamky s krivkou využijeme vzdialostnú funkciu vrcholov radiaceho polygónu Bèzierovej krivky od pevne zvolenej priamky a následne zavedieme novú Bèzierovu krivku. Je to kvôli tomu, že funkcia $d(t) = \sum_{i=0}^n d_i B_{i,n}(t)$ je polynomická funkcia v Bernsteinovom tvare a môžeme ju reprezentovať ako Bèzierovu krivku v tvare

$$\mathbf{D}(t) = (t, d(t)) = \sum_{i=0}^n \mathbf{D}_i B_{i,n}(t), \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

s radiacimi vrcholmi $\mathbf{D}_i = \left[\frac{i}{n}; d_i \right]$, pozri [8, str. 28-29].

Keďže budeme pracovať aj s orezávaním konvexného obalu, môžeme hovoriť, že *CC algoritmus* je spojením *algoritmov PT* a *CL*. Aby sme vylúčili tie prípady polôh kriviek, kedy nie je potrebné počítat prienik kriviek, urobíme predspracovanie týmto testom.

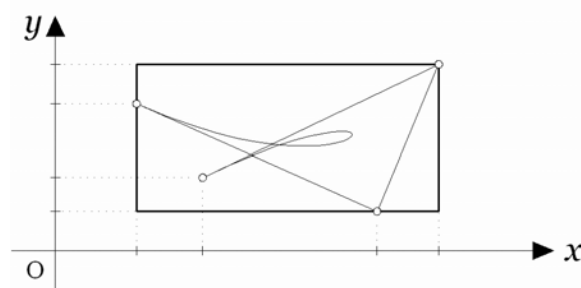
Test D

(nepretínanie sa konvexných obalov dvoch Bèzierových kriviek pomocou *minmax obalov*⁶)

Jednoduchou metódou na zistenie, či sa konvexné obaly dvoch Bèzierových kriviek pretínajú, je využitie minmax obalov.

Definícia 2.4 Nech je daná krivka $\mathbf{B}(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$. *Minmax obalom* nazveme najmenší rovnobežník, ktorý obsahuje konvexný obal krivky $\mathbf{B}(t)$ a ktorého strany sú rovnobežné so súradnicovými osami.

To znamená, že jeho ľavý dolný roh má súradnice $(x_{\min}, y_{\min})$ a pravý horný roh $(x_{\max}, y_{\max})$, pričom $x_{\min}$ resp. $x_{\max}$ je minimálna resp. maximálna hodnota x súradníc a $y_{\min}$ resp. $y_{\max}$ je minimálna resp. maximálna hodnota y súradníc všetkých vrcholov riadiaceho polygónu (obr. 20), pozri [9, str. 146-147]. Po jeho vytvorení môžeme v krátkom čase zistiť prienik minmax obalov dvoch kriviek.



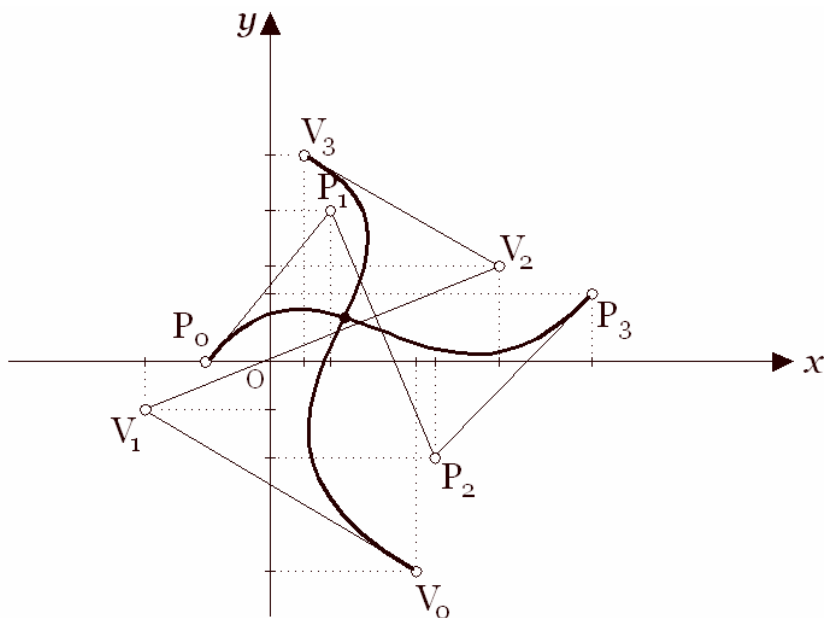
Obr. 20 Minmax obal

Teraz sa zamerajme na konštrukciu algoritmu prieniku dvoch Bèzierových kriviek, pričom využijeme metódu hrubej čiary. Nech sú dané krivky svojimi riadiacimi vrcholmi

$$\mathbf{V}(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \mathbf{V}_i, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

$$\mathbf{P}(s) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(s) \mathbf{P}_i, \quad s \in \langle 0, 1 \rangle \quad (\text{obr. 21}).$$

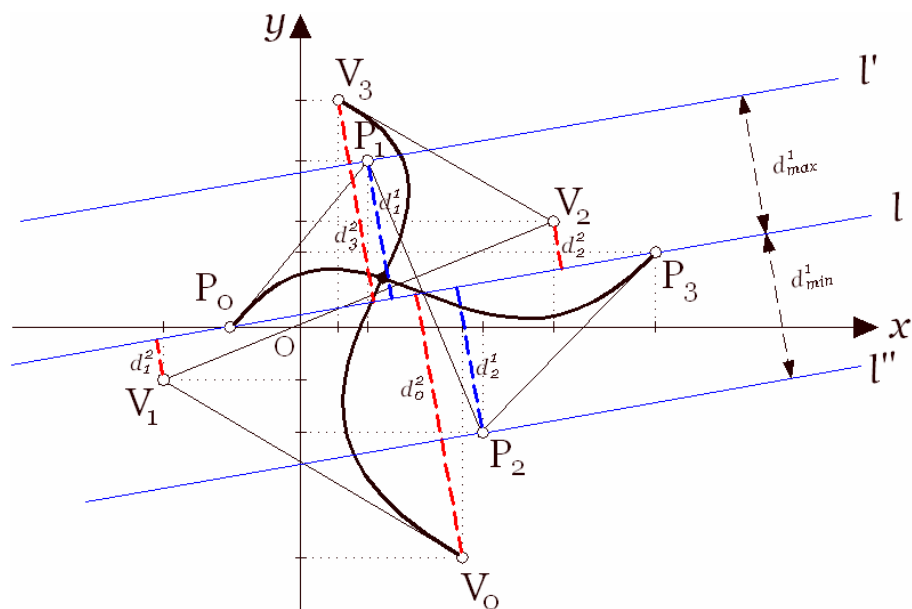
⁶ Z anglického *Minmax bounding box*



Obr. 21 CC algoritmus: a) zadanie

CC algoritmus (Curve-curve algorithm):

1. Test D
(nepretínania sa konvexných obalov dvoch Bèzierových kriviek pomocou *Minmax obalov*)
Ak sa konvexné obaly pretínajú, **tak** chod' na krok 2,
inak sa krivky nepretínajú a algoritmus skončí
2. Konštrukcia hrubej priamky $l'l''$ krivky $\mathbf{P}(s)$, $s \in \langle 0,1 \rangle$ v smere priamky $\mathbf{P}_0\mathbf{P}_n$ (obr. 22)
Ak vstupné krivky sú druhého alebo tretieho stupňa, podľa postupov uvedených v podkapitolách 3.3.2, 3.3.3 zúžiť hrubú priamku na menší rovinný pás.

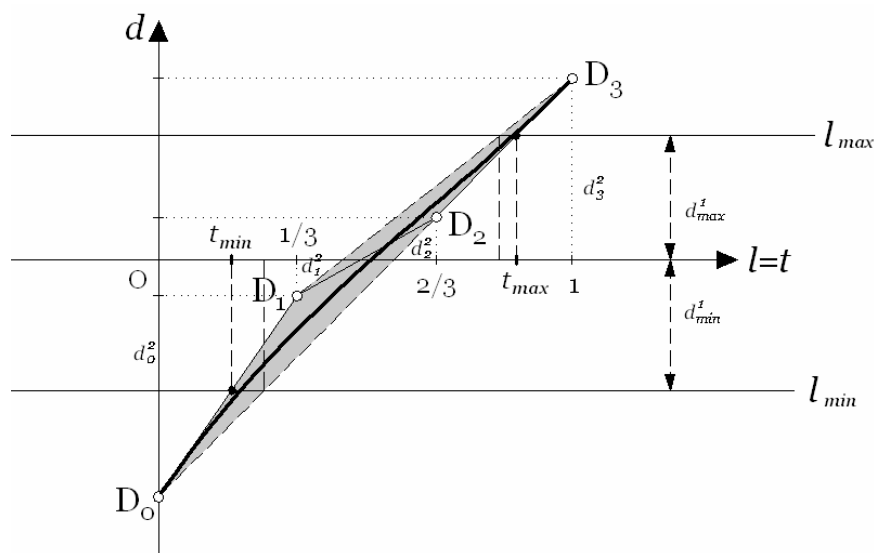


Obr. 22 CC algoritmus: *b*, konštrukcia hrubej priamky a orientované vzdialenosti

3. Konštrukcia priesečníkov krivky $V(t)$ s priamkami l' a l'' , t.j.

CL algoritmus:

4. Orientovaná vzdialenosť $d_i^2 = av_i^x + bv_i^y + c$ vrcholov riadiaceho polygónu $V_0, \dots, V_n$ od priamky l : dostávame množinu $\{d_0^2, d_1^2, \dots, d_n^2\}$
5. Určenie riadiacich vrcholov $D_0, D_1, \dots, D_n$ novej Bèzierovej krivky, kde $D_i = \left[\frac{i}{n}; d_i^2 \right]$ pre $i = 0, 1, 2, \dots, n$.
6. Stotožnenie priamky l s parametrickou osou t .
7. Priamky $l_{\min}, l_{\max} : l_{\max} \mid l \wedge |ll_{\max}| = d_{\max}^1$
 $l_{\min} \mid l \wedge |ll_{\min}| = d_{\min}^1$

Obr. 23 CC algoritmus: c_j novovytvorená Bèzierova krivka**Upravený PT algoritmus:**

8. Určenie konvexného obalu novovytvorenej krivky s vrcholmi $\mathbf{D}_i$,
 $i = 0, 1, \dots, n$

9. Test A

10. Test B

11. Priemet prieniku $l_{\min} \cap KO$ na os t , čo je $\langle t_1^*, t_2^* \rangle$, resp. $t_1^* = t_2^*$.

Priemet prieniku $l_{\max} \cap KO$ na os t , čo je $\langle t_1^{**}, t_2^{**} \rangle$, resp. $t_1^{**} = t_2^{**}$.

12. Určenie $t_{\min}, t_{\max}$ z množiny $\{t_1^*, t_2^*, \dots, t_u^*, t_1^{**}, t_2^{**}, \dots, t_v^{**}\}$

13. Pre hodnoty $t_{\min}, t_{\max}$ vyčíslit' body odpovedajúce na krivke $\mathbf{V}(t_{\min})$,
 $\mathbf{V}(t_{\max})$ pôvodnej krivky $\mathbf{V}(t)$. Dostávame orezanú krivku $\mathbf{V}'(t)$, pre
ktorú $\mathbf{V}'(0) = \mathbf{V}(t_{\min})$, $\mathbf{V}'(1) = \mathbf{V}(t_{\max})$.

14. Test C

(percentuálne porovnanie zmeny novovzniknutého intervalu $\langle t_{\min}, t_{\max} \rangle$
voči pôvodnému $\langle a, b \rangle$, resp. predchádzajúcemu intervalu) ⁷

$$\underline{\mathbf{A}k} \quad |t_{\max} - t_{\min}| \leq \delta |b - a|,$$

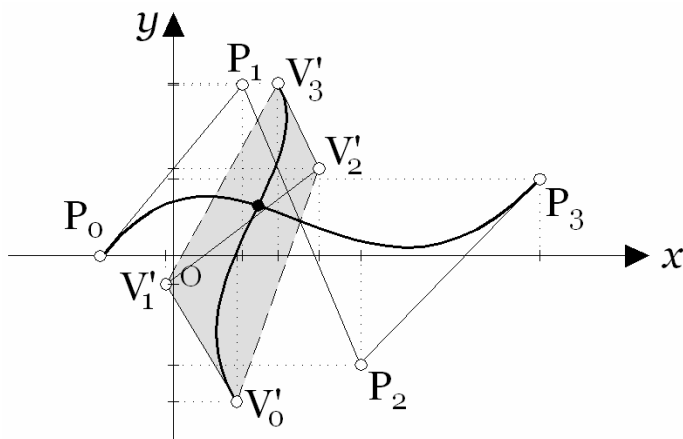
tak chod' na krok 15,

⁷ Inak povedané, ak sa pri opakovanom orezávaní nezmenil predchádzajúci interval $\langle t_{\min}, t_{\max} \rangle$ voči novovzniknutému o viac ako napr. 15%, môžeme predpokladať viac koreňov polynómu. Vtedy sa interval rozdelí na 2 menšie intervaly a pokračujeme s orezávaním pre každú časť samostatne.

inak pre $t_0 = \frac{|t_{\max} - t_{\min}|}{2}$ rozdeľ Bèzierovu krivku $\mathbf{B}(t)$ na dve nové Bèzie-rove krivky $\mathbf{V}'_1(t)$, $t \in \langle t_{\min}, t_0 \rangle$, $\mathbf{V}'_2(t)$, $t \in \langle t_0, t_{\max} \rangle$ a späť na krok 1 pre obidve nové krivky.

15. CPB – pre krivku $\mathbf{V}'(t)$, resp. pre krivky $\mathbf{V}'_1(t)$, $\mathbf{V}'_2(t)$.

16. Späť na krok 1 (*CC algoritmus* upravujeme pre druhú krivku a opakujeme, pokiaľ $|\mathbf{V}'_n \mathbf{V}'_0| < \varepsilon$, $|\mathbf{P}'_n \mathbf{P}'_0| < \varepsilon$, pričom ε je dopredu pevne zvolená hodnota).



Obr. 24 CC algoritmus: d_j výsledok

V *CC algoritme* sme použili upravený *PT algoritmus* namiesto klasického, pretože dáva kratší čas na orezanie, ale širšiu hrubú priamku v každom cykle algoritmu, čo sa pri programovej implementácii javí ako podstatná výhoda.

Kapitola 4

Projekt dizertačnej práce

V oblasti počítačovej grafiky je veľa problémov, pre ktoré neexistuje presné riešenie a s narastajúcimi nárokmi na skrátenie času výpočtu najmä algoritmov vykresľovania scény v reálnom čase tieto problémy dostávajú nový rozmer. Medzi také problémy patrí napríklad osvetlenie, viditeľnosť, zrkadlenie a iné. Všetky úlohy tohto typu vychádzajú z problému hľadania prieniku priamky s plochou, ktorý sa dá preložením pomocnej roviny redukovať na problém prieniku priamky s rovinnou krivkou. Všeobecnejšie, ide o prienik dvoch rovinných kriviek. Aj preto metódu Bèzierovho orezávania sa budeme snažiť rozšíriť do priestoru E^3 s využitím ďalších reprezentácií kriviek. Ďalšie rozšírenie z E^2 na E^3 je možné chápať ako hľadanie prienikov plôch, tvorených krivkami, prípadne hľadanie prienikov plôch s krivkami.

Ako sme naznačili už v úvode, celá práca je založená na teórii Bèzierových kriviek a ich vlastnosti konvexného obalu. Je nevyhnutné spomenúť, že Bèzierove krivky majú okrem mnohých výhod aj isté nevýhody. Jednak je to fakt, že svoje riadiace body (okrem prvého a posledného) len aproximujú a jednak je to globálna zmena, t.j. pri zmene jedného vrcholu sa mení celá krivka, preto pri geometrickom modelovaní kriviek niekedy dochádza k ťažkostiam. Tu sa zameriame na iné typy kriviek.

4.1 Bèzierove orezávanie pre nebèzierovské krivky

Nevýhody Bèzierových kriviek „odstraňujú“ rôzne druhy splajnových kriviek, ktoré sú mnohé interpolačné a majú výhodu lokálnej zmeny; pri zmene jedného vrcholu riadiacej lomenej čiary sa zmenia len v okolí tohto bodu. Niektoré druhy splajnových kriviek sme spomenuli v podkapitole 1.3. Našťastie, segmenty splajnových kriviek možno vyjadriť v tvare Bèzierových kriviek, preto možno uvažovať aj o rozšírení Bèzierovho orezávania na takéto krivky.

Vlastnosť konvexného obalu majú aj mnohé triedy splajnových kriviek, teda nielen ich jednotlivé úseky. Pokúsime sa zistiť, do akej miery možno previesť idey Bèzierovho orezávania do tejto oblasti.

Pretože metóda Bèzierovho orezávania má veľa nedoriešených otázok, spomeňme aspoň niektoré, ktorým sa budeme venovať v dizertácii:

4.2 Konvergencia Bèzierovho orezávania

Ako z názvu vyplýva, bude reč o dôkaze, ktorý zabezpečí, že po konečnom počte krokov orezávania konvexného obalu krivky [podkapitola 3.1] bude vzdialenosť bodov $t_{\min}, t_{\max}$ parametrickej osi t menšia ako kladná konštanta ε vopred zadaná, t.j. $|t_{\min}, t_{\max}| < \varepsilon$. Ide o dôkaz, prostredníctvom ktorého ukážeme, že priesečník krivky s osou t naozaj existuje a s istou odchýlkou ho dokážeme vyčíslit' ako stred úsečky $t_{\min} t_{\max}$.

4.3 Programová realizácia

Podstatou programovej realizácie algoritmov opísaných v kapitole 3 bude ich implementácia do programovacieho jazyka Pascal v prostredí Delphi 4.0. Pretože algoritmy sú pomerne náročné, bude potrebné doriešiť veľa problémov spojených s prepisom do aktuálneho programovacieho jazyka a vizualizáciou geometrických situácií skúmaných kriviek. Predmetom ďalšej práce sa stáva aj rozšírenie stupňa n Bèzierových kriviek na stupne väčšie ako 3, poprípade nájsť a overiť vzťahy Bèzierovho orezávania euklidovského priestoru vyššej dimenzie.

Pri riešení prienikov kriviek môžeme vyšetrovať správnosť výsledkov aj analytickým spôsobom. Považujeme to za matematicky presný a správny postup riešenia koreňov polynómov. Nesie to však so sebou nevýhodu z hľadiska programovej implementácie pre stupeň kriviek $n > 4$. Konkrétne do stupňa $n=2$ máme veľmi jednoduché metódy riešenia koreňov polynómov, pre stupeň 3 existujú tzv. *Cardanove vzorce* a pre stupeň 4 vzorce pochádzajúce od Ferrariho, práca s ktorými je ale náročná.⁸ Podľa Galoisovej teórie, pre stupne väčšie ako štyri príslušné vzorce neexistujú. Pritom naša metóda, metóda Bèzierovho orezávania, je použiteľná aj vtedy.

4.4 Experimenty

V tejto časti sa zameriame na experimentálnu stránku problému. Budeme testovať na mnohých (rádovo desiatkach) náhodných i riadených pokusoch, či algoritmus dáva správny výsledok. Ďalej by bolo vhodné overiť chybu, s akou algoritmus pracuje a tiež jeho rýchlosť. Z týchto hľadísk porovnáme algoritmus s analyticky presným výpočtom (ak je možný) a s klasickými numerickými algoritmami (Newtonov, delenie intervalu a iné).

⁸ Riešenie rovnice 3. stupňa sa pripisuje G. Cardanovi (1501-1576) a prvé riešenie rovnice 4. stupňa sa podarilo nájsť Cardanovmu žiakovi L. Ferrarimu (1522-1565).

Ako sme spomenuli na konci *CC algoritmu* [kapitola 3.3.3], pri probléme vyšetovania prieniku dvoch Bèzierových kriviek môžeme využiť dve metódy orezania konvexného obalu krivky pomocou hrubej priamky. Preto bude zaujímavé štatisticky overiť a porovnať rýchlosť konvergenzie oboch variant algoritmu a vybrať vhodnejšiu z nich.

Zoznam použitej literatúry

Literatúra

- [1] CAMPANGA, S., SLUSALLEK, P.: *Improving Bézier Clipping and Chebyshev Boxing for Ray Tracing Parametric Surfaces*. Technical report, University of Erlangen, Computer Graphics Group, 1996.
- [2] EFRENOV, A., HAVRAN, V., SEIDEL, H.-P.: *Efficient Ray Tracing of Trimmed NURBS Surfaces*. Master Thesis in Computer Science. Saarbrücken, 2004. pp. 33-40.
- [3] EFRENOV, A., HAVRAN, V., SEIDEL, H.-P.: *Robust and Numerically Stable Bézier Clipping Method for Ray Tracing NURBS Surfaces*. Proceedings of SCCG, Budmerice 2005. Comenius University, Bratislava, 2005. ISBN 80-223-2057-9. pp. 123-131.
- [4] FARIN, Gerald E. – HANSFORD, Dianne: *The Essentials of CAGD*. Natick, MA: A K Peters Ltd., 2000.
- [5] HEJNÝ, Milan – ZAŤKO, Valent – KRŠŇÁK Pavel: *Geometria 1*. SPN, Bratislava, 1985.
- [6] HLÚŠEK, R.: *Bézier Curves Intersection Using Relief Perspective*, Proceedings of SCG'2000. Bratislava, 2000.
- [7] HORÁK, J., JANYŠKA, J.: *Analytická geometrie*. Skriptá MU, Brno 2002.
- [8] CHALMOVIANSKÝ, P., FERKO, A., GALBAVÝ, R., NIEPEL, Ľ: *Zložitosť geometrických algoritmov*. FMFI UK, Bratislava, 2001. ISBN: 80-223-1598-2.

- [9] KATRINÁK, T., GAVALEC, M., GEDEONOVÁ, E., SMÍTAL, J.: *Algebra a teoretická aritmetika*. UK Bratislava, 2002. ISBN 80-223-1674-1.
- [10] KLETTE Reinhard and ROSENFELD Azriel: *Digital Geometry Geometric Methods for Digital Picture Analysis*. Morgan Kaufmann, San Francisco, 2004.
- [11] MACHALOVÁ, Z.: *Prieniky jednoduchých splajnových kriviek s využitím metódy Bèzier clipping*. Rigorózna práca. FMFI UK, Bratislava, 1999.
- [12] MARCH, D.: *Applied Geometry and Geometry Modeling*. Springer-Verlag, London, 1999.
- [13] NISHITA, T.: *Application of Bezier clipping method and their Java applets*. Faculty of Engineering. Fukuyama, 1995.
- [14] NISHITA, T., SEDERBERG, T.W.: *Ray Tracing Trimmed Rational Surface Patches*. Computer Graphics, 1990.
- [15] QUILIN, D., DAVIES: *Surface Engineering Geometry for Computer Aided Design and Manufacture*. Ellis-Horwood, 1987. ISBN: 0-7458-0181-1.
- [16] SALOMON, D.: *Computer Graphics and Geometric Modeling*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [17] SAMUELČÍK, M.: *Bèzier and B-Spline volumes*. Projekt dizertačnej práce. Bratislava, 2006.
- [18] SEDERBERG, Thomas W.: *Computer Aided Geometric Design*, 2003. <http://tom.cs.byu.edu/~557/text/cagd.pdf>
- [19] SZARKOVÁ, D., ZÁMOŽÍK, J.: *Priesečníky čiar*. Zborník sympózia o počítačovej geometrii SCG' 2004, Bratislava, 2004.
- [20] VELICHOVÁ, D.: *Konstrukčná geometria*. Slovenská technická univerzita, Bratislava, 1996.
- [21] WANG, S.-W., SHIH, Z.-C., CHANG, R.-C.: *An Improved Rendering Technique for Ray Tracing Bézier and B-spline Surfaces*. The Journal of Visualization and Computer Animation, 2000. pp.209-219.

Internet

- [1] <http://portal.acm.org>
- [2] <http://citeseer.ist.psu.edu>
- [3] <http://www.math.sk/skripta2/index.html>